第31卷第7期
2012年7月

大 学 物 理
COLLEGE PHYSICS

Vol. 31 No. 7
July 2012

《从零学相对论》连载

**编者按**：梁灿彬教授是中国著名的相对论专家，做过许多高水平的科研工作.他同时又是一位杰出的教育家，在电磁学、微分几何和相对论的教学中做出了突出成绩.他编写的《微分几何入门与广义相对论》一书为在我国推广现代微分几何知识，提高相对论研究水平做出了重要贡献.

由于《微分几何入门与广义相对论》这本书的内容很多、很深，初学者理解有一定困难，非相对论专业的人又很难投入大量的时间来学习，于是梁灿彬教授又撰写了一本名为《从零学习相对论》的书.这本书用浅显而直观的一点点几何语言，较少的数学公式，对狭义与广义相对论的物理基础及前沿领域，包括洛伦兹收缩、动钟变慢、双生子佯谬、车库佯谬等难于理解的问题，做了通俗、清晰而富有趣味的介绍，对经常发生理解混乱的静质量、动质量、能量守恒、质量是否守恒等问题，也给出了明确的解答，还对相对论在GPS中的应用，虫洞和时间机器等问题，进行了介绍和有趣的讨论.

考虑到《从零学习相对论》这本书对在我国普及相对论知识，提高一般数学工作者、物理工作者、教师和学生的相对论水平，解决相对论教学中的疑难问题，均能起重要作用.本刊决定连载该书的部分内容以供读者学习、参考.

# 《从零学相对论》连载①

梁灿彬[1]，曹周键[2]
（1. 北京师范大学 物理系，北京 100875；2. 中科院 应用数学所，北京 100190）

## 第1讲 狭义相对论的引入

相对性原理是牛顿力学的一个重要出发点.然而，麦克斯韦（以下简称麦氏）的电磁理论问世之后，相对性原理曾一度遭遇过严峻的挑战，最终导致狭义相对论的诞生.因此，要介绍狭义相对论的引入动机，有必要讲清以下三个问题：

1. 什么是相对性原理？

2. 麦氏电磁理论为何曾一度对相对性原理提出过严峻挑战？

3. 上述挑战如何诱发爱因斯坦创立狭义相对论？

### §1.1 相对性原理

“温故而知新”.要介绍相对论，首先复习一点牛顿力学.牛顿力学的一个出发点是（伽利略的）相对性原理，它要求所有惯性系平权，就是说，要求同一物理定律在所有惯性系中有相同的数学表达式.这是一个很强的原理，实质上是一个“管定律的定律”——想要成为定律就必须服从这个原理的要求.为了解释“物理定律在所有惯性系中有相同数学表达式”一语的准确含义，我们从介绍“事件”概念开始.“事件”概念非常直观，一声咳嗽、两车相撞以及炸弹爆炸都是实际发生的事件.每个实际事件都要占据空间的一个小区域，而且要持续一小段时间.物理学中的事件概念则是实际事件的模型化，即认为每一事件发生在空间的一点和时间的一瞬（一个时刻）.甚至，不论有没有什么（有意义的）事情发生，空间的一点和时间的一瞬的结合都叫做一个**事件**（event）.如果两件事情在同时同地发生（例如某人在咳嗽的同时眨了一下眼），则认为是同一事件.全体事件的集合称为**时空**（spacetime），因此事件也称为**时空点**（spacetime point）.

借助于惯性系能够对事件进行定量描述.在很多情况下可认为地球在做惯性运动，所以地球可近似地看作惯性参考系，称为**地球参考系**或**地面参考系**.设A是相对于地球静止的一点（称为地面系的一个**空间点**），如果A点在某一时刻$t$发生了一个事

件，记作 $p$，则 $p$ 可用如下方式表为：

$$p=(t,\mathrm{A}). \qquad (1-1-1)$$

上式表明事件 $p$ 的发生时刻是 $t$，发生地点是 A 点. 请注意 $p$ 与 A 的区别. $p$ 是事件（时空点），A 是空间点，在其上可以发生一连串不同的事件，各事件的区别在于发生时刻不同，$p$ 只是其中之一. 鉴于初学者（甚至不少非初学者）存在着混淆时空点和空间点的"常见病"，本书特意用小写斜体字母（如 $p$）代表时空点（事件），用大写正体字母（如 A）代表空间点.

为了定量地刻画 A，还有必要引入坐标系. 设 O 是地面参考系的一个空间点，以它为原点建立一个相对于地球为静止的直角坐标系，记作 $\{x,y,z\}$ 系，便可给空间点 A 赋予 3 个空间坐标 $x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A}, z_\mathrm{A}$，可表为 $\mathrm{A}=(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A}, z_\mathrm{A})$，从而把式(1－1－1)具体化为

$$p=(t,x_\mathrm{A},y_\mathrm{A},z_\mathrm{A}). \qquad (1-1-1')$$

去掉下标 A，可以一般地把任一事件 $p$ 表为

$$p=(t,x,y,z). \qquad (1-1-2)$$

把 $t$ 称为**时间坐标**，就可以说每一事件 $p$ 有 4 个时空坐标. 于是我们就有了一个 4 维坐标系，称为地面参考系内的一个**惯性坐标系**，记作 K，也记作 $\{t,x,y,z\}$，即 K 与 $\{t,x,y,z\}$ 同义.

设有一列火车在地面上匀速直线平动，则火车系也是惯性参考系，也可以类似地建立火车参考系内的一个惯性坐标系，记作 K′或 $\{t',x',y',z'\}$，此系对同一事件 $p$ 又赋予另外 4 个时空坐标：

$$p=(t',x',y',z'). \qquad (1-1-3)$$

在 $t$ 上加撇似乎画蛇添足，因为在牛顿力学（以及人们的生活经验）中，同一事件的发生时刻与惯性系无关，总有 $t'=t$. 不过还是写成 $t'$ 为好，因为不久将会看到在相对论中 $t'$ 一般不等于 $t$.

同一事件的两组坐标 $t,x,y,z$ 和 $t',x',y',z'$ 当然应有某种关系，这一关系称为**坐标变换式**，取决于两个惯性坐标系之间的关联方式. 图 1－1 示出一种最简单的关联方式（本书称之为**最简关联**），满足如下条件：① 两系空间坐标轴对应同向；② K′系的空间坐标轴相对于 K 系以速率 $v>0$ 沿 $x$ 轴正向匀速平动；③ 空间坐标原点 O 和 O′在 $t'=t=0$ 时重合（相遇）. 在这种情况下不难证明两系坐标的变换关系为（证明见力学教科书）

$$t'=t, \quad x'=x-vt, \quad y'=y, \quad z'=z. \qquad (1-1-4)$$

上式就是著名的**伽利略变换式**. 由此又不难推出质点的速度变换式. 由于本书把字母 $\boldsymbol{v}$ 专用来代表两系之间的相对速度，质点的速度只好改用字母 $\boldsymbol{u}$ 代表. 质

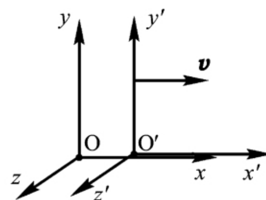



图 1－1　有最简关联的两个惯性系

点的运动对应于一连串（相继发生的）事件，质点在每一时刻 $t$ 位于某空间点 $(x,y,z)$ 就是一个事件，所以质点的空间坐标 $x,y,z$ 都是 $t$ 的函数，可记作 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$，于是质点的速度 $\boldsymbol{u}$ 的分量依次为

$$u_x=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, \quad u_y=\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}, \quad u_z=\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}, \qquad (1-1-5)$$

同理，质点相对于 K′系的速度 $\boldsymbol{u}'$ 的分量为

$$u'_x=\frac{\mathrm{d}x'(t')}{\mathrm{d}t'}=\frac{\mathrm{d}x'(t)}{\mathrm{d}t},$$

$$u'_y=\frac{\mathrm{d}y'(t)}{\mathrm{d}t}, \quad u'_z=\frac{\mathrm{d}z'(t)}{\mathrm{d}t}.$$

利用式(1－1－4)，注意到 $v$ 为常数 $(\mathrm{d}v/\mathrm{d}t=0)$，便得

$$u'_x=u_x-v, \quad u'_y=u_y, \quad u'_z=u_z. \qquad (1-1-6)$$

上式就是牛顿力学中的速度变换式，是伽利略变换式的必然结果.

现在就可以说明"物理定律在所有惯性系中有相同数学表达式"的准确含义. 以牛顿第二定律为例. 谁都知道此定律在 K 系的表达式为 $\boldsymbol{f}=m\boldsymbol{a}$，问题是：若以 $m'$，$\boldsymbol{f}'$，$\boldsymbol{a}'$ 依次代表 K′系测得的质量、力和加速度，是否也有 $\boldsymbol{f}'=m'\boldsymbol{a}'$？如果此式成立，就说牛顿第二定律在两系有相同的数学表达式. 由于牛顿力学默认 $m'=m$，$\boldsymbol{f}'=\boldsymbol{f}$，所以只须验证 $\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{a}$，为此只须验证两者的各分量相等. 而这是很容易的，因为

$$a'_x=\frac{\mathrm{d}u'_x}{\mathrm{d}t'}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_x-v)=\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}=a_x,$$

［其中第二步用到式(1－1－6)］，

再由式(1－1－6)一望而知 $a'_y=a_y$，$a'_z=a_z$，所以 $\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{a}$. 可见牛顿第二定律服从相对性原理.

事实上，牛顿力学的每一个定律都服从相对性原理，因此都是定律.

然而"好景不长"，因为麦氏在 1873 年发表的电磁理论曾一度对相对性原理提出过严峻的挑战. 详见下节.

## §1.2　麦克斯韦电磁理论的挑战

麦氏在前人工作的基础上于 1873 年发表了一套电磁理论，其中的麦氏方程可被看作电磁场的演

化方程.麦氏理论的一个伟大成果是预言了电磁波的存在(麦氏方程容许波动解),并证明了电磁波在真空中的传播速率与真空中的光速 $c$ 相同(波动解的波速为 $c$),从而揭示了光的电磁本性.既然相对性原理是“管定律的定律”,麦氏方程(如果想要成为定律)就必须服从,亦即在任一惯性系中都应取相同的数学表达式,从而导致“电磁波相对于任一惯性系的速率都为 $c$”的结论.然而,设电磁波沿某惯性系的 $x$ 方向以速率 $c$ 传播,根据速度变换式(1-1-6),该电磁波相对于另一惯性系的速率就不为 $c$,因为两系之间有相对速度.于是出现如下局面:

①麦氏方程+②相对性原理⇒光速对各系皆为 $c$.

[与伽利略变换推出的速度变换式(1-1-6)矛盾!] (1-2-1)

上式似乎表明,如果①和②都成立,就会推出矛盾[与速度变换式(1-1-6)矛盾].于是麦氏理论与相对性原理似乎互不相容.物理学似乎只能在以下两种选择中做一抉择.

**选择A** 相对性原理只适用于力学而不适用于电动力学.存在一个特殊的惯性系,麦氏方程在该系成立,真空中的光波相对于该系的速率为 $c$;在其他惯性系中麦氏方程不成立,真空光速不为 $c$.这个特殊的惯性系在历史上称为“以太(ether)系”.洛伦兹是坚持这一选择的代表人物.

**选择B** 相对性原理对力学、电动力学等一切物理范畴都适用(能“管”所有物理定律),但麦氏电磁理论不正确.应该存在一个不同于麦氏理论的电磁理论,它在所有惯性系中的数学表达式都有相同形式(惯性系之间的坐标变换仍默认为伽利略变换).

以上讨论给读者这样的印象:相对性原理与麦氏理论水火不容,必须放弃其中一个.这是一个“硬碰硬”的问题:相对性原理和麦氏理论都非同一般地“硬”,放弃哪一个都非常困难.历史上的确有过许多尝试,但都陷入理论上无法自圆其说或者与某些实验事实不符的困境①.于是物理学家遇到了一个两难问题.不过,如果更仔细地思索,就会发现相对性原理与麦氏理论并非真的势不两立, 因为在导致矛盾的讨论中还涉及第三者——由伽利略变换推出的速度变换式(1-1-6).人们之所以认为相对性原理与麦氏理论水火不容,是因为他们心中默认速度变换式(1-1-6).假若允许对此式做适当修改,矛盾仍有希望消除.(打个生活中的比喻:去掉第三者仍有希望恢复夫妻关系的和谐.)可是速度变换式(1-1-6)似乎是更“硬”的东西,因为它是伽利略变换的推论,而伽利略变换是既合情合理又久经考验的公式,还能有错!?然而,独具慧眼的爱因斯坦在反复思考后竟然发现这一公式的确有一个错误.问题恰恰出在伽利略变换式(1-1-4)的第一式 $t'=t$ 身上.此式的含义是:如果一个惯性系认为某事件在时刻 $t$ 发生,则另一惯性系也认为该事件在时刻 $t$ 发生.这同每个人的生活经验完全吻合,可以称为“时间的绝对性(与坐标系之类的人为选择因素无关)”,由此又可推出“同时性的绝对性”,含义如下.设 $p_1$,$p_2$ 是两个事件,在惯性系K的时空坐标分别为

$$p_1=(t_1,x_1,y_1,z_1),\quad p_2=(t_2,x_2,y_2,z_2).$$

如果 $t_1=t_2$,我们就说 $p_1$ 和 $p_2$ 对K系而言是同时事件.再设K′系给 $p_1$,$p_2$ 赋予的时空坐标为

$$p_1=(t'_1,x'_1,y'_1,z'_1),\quad p_2=(t'_2,x'_2,y'_2,z'_2),$$

则由“时间的绝对性”[式(1-1-4)的第一式]自然有 $t'_1=t_1$,$t'_2=t_2$,于是由 $t_1=t_2$ 得到 $t'_1=t'_2$,可见对K系为同时的两事件对K′系也是同时的.这就是“同时性的绝对性”的含义.牛顿力学坚持(默认)伽利略变换,因此在牛顿力学中同时性是绝对的,而且人们从生活经验出发也对此深信不疑.然而爱因斯坦在反复思考后认为“同时性的绝对性”并非无懈可击,他构想出如下反例.

一列火车A′B′在地面上匀速直线地飞驰而过.假定地面系发现车头A′和车尾B′同时遭受雷击(图1-2).爱因斯坦认为,对火车系而言,这两个事件并非同时事件.理由如下.

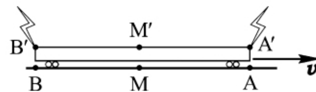



图1-2 爱因斯坦列车的雷击同时性问题

① 关于这方面的历史(特别是史上有名的实验)请参阅其他教材,例如文献[1]和文献[2].历史上最有名的实验是迈克耳孙(Michelson)和莫雷(Morley)在1887年的干涉仪实验,旨在测定地球相对于以太的速度,但得到的是“零结果”.由于发明这种干涉仪以及所做的多次光学实验,迈克耳孙荣获1907年的诺贝尔奖,是美国获此殊荣的第一人.

以A和B分别代表地面系发现雷击车头时A′和B′在地面上留下的印记.(忽略火车高度，认为此时A′与A重合，B′与B重合.)以M代表AB段的中点.所谓“地面系认为两个雷击事件同时发生”，是指车头和车尾遭雷击时所发的光同时传到M点[①].再以M′代表火车的中点，随着火车向前行进，M′点迎着车头而背离车尾运动，理应先收到车头来光后收到车尾来光，就是说，车头和车尾发出的光并不同时到达M′，所以火车系认为“雷击车头”和“雷击车尾”这两个事件并不同时.爱因斯坦就是这样出人意料地提出了对“同时性的绝对性”的质疑，从而也就是对伽利略变换式(1－1－4)中的$t'=t$做出了否定，并以此为突破口创立了狭义相对论.相对论的第一篇(奠基性)论文发表于1905年，题为《论运动物体的电动力学》.在这篇论文中，爱因斯坦首次提出了狭义相对论的两个基本假设，介绍如下.

**假设1(相对性原理)**　所有惯性系平权，任何物理定律(而不只是力学定律)在所有惯性系的数学表达式都有相同的形式.

**假设2(光速不变原理)**　真空中的光速沿任何方向、对任何惯性系都是$c$，与光源的运动情况无关.

**注1**　伽利略的相对性原理只适用于牛顿力学定律，爱因斯坦的相对性原理则适用于所有物理定律.由前面的讨论可知，为此必须找出一组新的坐标变换来代替伽利略变换，这组新的坐标变换叫做洛伦兹变换，见下节.

**注2**　假设2的关键内容是“光速对任何惯性系都是$c$”，而关键的关键是“惯性系”一词.用非惯性系测量光速的结果完全可以不是$c$.

**[选读1－1]**

用今天的眼光看问题(“事后诸葛亮”)，麦氏方程组当然是物理定律，所以假设1保证它在任何惯性系都有相同表达式，而由此自然导出光速(电磁波速)沿任何方向、对任何惯性系都是$c$，所以假设2应看作假设1的推论而不是独立的假设(其实历史上早就有人提出过类似问题并引起过讨论).至于假设2的最后一句话，即“与光源的运动情况无关”，今天看来也是多余的，因为，既然光速沿任何方向、对任何惯性系都是$c$，它当然与光源的运动情况无关.但是，历史地说，选择B[见式(1－2－1)下面]的支持者们构造了各种各样的、不同于麦氏理论的电磁理论，它们的共同点是：光相对于光源的速率为$c$，相对于惯性系的速率则取决于光源相对于该系的速度.所以，这些理论认为光速与光源的运动情况有关.后来的双星实验(1913年)及其他实验否定了这一结论.但是爱因斯坦提出上述两个假设是在1905年，那时人们对于光速是否与光源有关还极为重视，也许正是这个原因使爱因斯坦在假设2中添加了最后一句关于光速与光源的运动情况无关的话.论文中的原话是这样的：“**下面我们……引入进一步的假设**(笔者注：指假设2)——**一个乍看起来与前一假设势不两立的假设**(笔者注：从伽利略变换看来当然势不两立)——**光在真空中以速度$c$传播，这一速度不依赖于发射体的运动性质.**”

**[选读1－1完]**

**[选读1－2]**

关于火车遭受雷击的讨论，笔者曾不止一次地被问及一个有趣的问题.本选读用对话方式介绍这一问题及其答案，其中乙代表笔者.

**甲**　如果站在火车系上看问题，则M′并无运动，正如地面系认为M无运动那样.把在地面系上的思辨过程照样搬到火车系上，岂非M′也同时收到车头、车尾来光？

**乙**　不能照搬.地面系认为车头发光和车尾发光是同时事件，而我们不敢说火车系也认为这两个事件同时(事实上有待证明的正是它们并不同时).可见火车系的已知条件并不充分，难以站在火车系上讨论此问题.而地面系的已知条件——车头、车尾同时发光——是从一开始就给定的.为帮助你获得更清晰的理解，我用稍微不同的方式把问题的“已知”、“求证”和“证明”再次明确地写在下面.

**已知**：① 车头、车尾都受雷击，雷击时都向外发光；② M点同时收到车头、车尾来光.**求证**：M′不同时收到车头、车尾来光.**证明**：站在地面系上想，假若M′不随车动，根据已知条件②，M′自然会同时收光.但实际上M′随车向前运动，所以他迎着车头来光而背离车尾来光，故不同时收光.说明：如果站在火车系上想，虽然M′不动，却没有类似于已知条件②的条件可用，所以得不出M′同时收光的结论.

**甲**　我明白了.由此我还体会到爱因斯坦的一个高明之处，就是他只站在地面系讨论这个问题.

**乙**　很好.　**[选读1－2完]**

(未完待续)

① 设某人坐在M点，则他“收到车头来光”与“收到车尾来光”这两个事件都发生在他身上，同时与否有明确意义.爱因斯坦正是巧妙地利用“发生在同一个人身上的两事件的同时性”这一已知概念来给“发生在不同地方的两事件的同时性”下定义.

《从零学相对论》连载

# 《从零学相对论》连载②

梁灿彬[1]，曹周键[2]
(1. 北京师范大学 物理系，北京 100875; 2. 中科院 应用数学所，北京 100190)

## §1.3 洛伦兹变换

设两个惯性系之间有最简关联(见图1-1及其所在段)，则任一事件在该系的时空坐标 $t,x,y,z$ 和 $t',x',y',z'$ 有如下关系:

$$\text{(a)}\ t'=\gamma\left(t-\frac{v}{c^2}x\right),\quad \text{(b)}\ x'=\gamma(x-vt),$$

$$\text{(c)}\ y'=y,\quad \text{(d)}\ z'=z,\quad (1-3-1)$$

其中

$$\gamma\equiv\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.\quad (1-3-2)$$

上式称为洛伦兹变换. 利用狭义相对论的两个基本假设(即相对性原理和光速不变原理)，加上对空间、时间均匀性以及空间各向同性性的默认，爱因斯坦在1905年的开创性论文中推出了这一变换. 在后来的无数教材中都能找到这一变换的证明版本，虽然证法五花八门，但都离不开两个假设以及对均匀性和各向同性性的默认. 然而某些数学家(如华罗庚)对于物理教材的这些证法不太满意，于是又发展出"数学家式"的证明思路. 本书不拟过多涉及这一问题，只想说明，笔者曾杜撰出一种用"几何语言"导出洛伦兹变换的方法，详见§4.5.

洛伦兹在相对论诞生前的1904年就已发表过式(1-3-1)(这正是该式被称为洛伦兹变换的缘由)，不过并未给出推导过程. 他知道用式(1-3-1)代替伽利略变换就意味着修改牛顿力学，而他不认为牛顿力学需要修改，所以只把式(1-3-1)视为便于计算而引入的辅助工具，其中的 $t'$ 不是什么物理时间(他称之为局域时间)，物理上的坐标变换仍然要用伽利略变换. 正是对伽利略变换和牛顿力学的过分坚持使洛伦兹与相对论的创立失之交臂.

相对论物理学与非相对论物理学都把相对性原理作为基本出发点. 仅就这一层面而言，相对论与非相对论并无二致. 然而，把物理定律的数学表达式从一个惯性系变到另一惯性系时必然涉及两系之间的坐标变换，而这在非相对论和相对论中存在实质性的区别，所以相对性原理在两种理论中有不同的内涵. 伽利略提出相对性原理时，心目中只有力学现象，而且坐标变换只有伽利略变换，因此伽利略的(即非相对论的)相对性原理可以表为"力学定律的数学表达式在伽利略变换下形式不变"，简言之就是"力学定律具有伽利略协变性"[①]，爱因斯坦的相对性原理则要求每一物理定律的表达式在各惯性系中形式相同，而且两系之间要用洛伦兹变换，因此爱因斯坦的(即相对论的)相对性原理也可表为"物理定律的数学表达式在洛伦兹变换下形式不变"，简言之就是"物理定律具有洛伦兹协变性".

洛伦兹变换有一系列重要的性质和推论，下面指出5点.

1. 由 $\gamma\equiv1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ 易见 $v<<c$ 时 $\gamma\approx1$，故式(1-3-1b)近似回到 $x'=x-vt$，与伽利略变换式(1-1-4)的第二式一致. 此外，通过讨论还能证明式(1-3-1a)在 $v<<c$ 时也近似回到伽利略变换的 $t'=t$(详见选读1-3). 可见伽利略变换是洛伦兹变换的低速近似. 事实上，整个牛顿力学都可看作狭义相对论力学的低速近似(见后续内容). 日常生活和工程(包括汽车、飞机甚至火箭和航天领域)中的绝大多数问题都可用牛顿力学解决(杀鸡焉用牛刀). 然而，在高能物理学领域中经常涉及速率与光速同量级的高能粒子(能量越高速率越大)，甚至光子本身，这时牛顿力学就不再适用. 例如，当粒子的速率 $v=0.99\cdots995c$(共有 $2n$ 个9)时，$\gamma$ 近似为 $10^n$. 可见，高能粒子物理学的大部分问题非用狭义相对论不可.

2. 由 $\gamma\equiv1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ 可知当 $v>c$ 时 $\gamma$ 为虚数，但时空坐标 $t,x,y,z$ 和 $t',x',y',z'$ 都是实数，故式(1-3-1)中的 $\gamma$ 必须为实数，因而 $v$ 不允许大于

① "协变(covariance)"一词有"协同改变"之意，就是说，虽然公式中的若干物理量在坐标变换下要变，但它们之间能够如此这般地协同改变，致使整个公式的形状不变.

$c$. 此外,当 $v=c$ 时 $\gamma$ 无意义(分母为零的分数无意义),可见洛伦兹变换对惯性系之间的相对速率 $v$ 给出了上限,只允许 $v<c$. 我们在此第一次看到真空光速在相对论中扮演着极限速率的角色. 后面(§5.9)还将讨论超光速导致因果关系破坏的问题.

3. 式(1-3-1)表明变量 $t',x',y',z'$ 对 $t,x,y,z$ 有线性的依从关系,不难通过反解求得(留作习题)逆变换式:

(a) $t=\gamma\left(t'+\frac{v}{c^2}x'\right)$, (b) $x=\gamma(x'+vt')$,

(c) $y=y'$, (d) $z=z'$. (1-3-1′)

从物理角度看,上式无非是如下简单事实的反映"火车相对于地面以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动"相当于"地面相对于火车以速度 $-\boldsymbol{v}$ 运动".

4. 仿照牛顿力学速度变换式(1-1-6)的推导方法,不难从洛伦兹变换式(1-3-1)出发推出如下的相对论速度变换式:

$$u'_x=\frac{u_x-v}{1-\frac{v}{c^2}u_x},\quad u'_y=\frac{u_y}{\gamma\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)},$$

$$u'_z=\frac{u_z}{\gamma\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)}. \qquad (1-3-3)$$

证明留作习题. 对上式要做几点说明.

(1) 式中的 $v$ 是两惯性系的相对速率,是常数. 但式中的 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{u}'$ 却代表粒子在两个惯性系中的速度,不要求是常矢量,即式(1-3-3)适用于作任意变速运动的粒子.

(2) 当 $v<<c$ 时有 $vu_x/c^2<<1$,式(1-3-3)简化为牛顿力学的速度变换式(1-1-6).

(3) 根据牛顿力学的速度变换式,当 $v>c/2$,$|\boldsymbol{u}|>c/2$ 时,只要适当选择 $\boldsymbol{u}$ 的方向,就有 $|\boldsymbol{u}'|>c$,即允许超光速. 但由相对论速度变换式(1-3-3)可以证明此种情况不会出现. 只要粒子相对于某惯性系的速率 $u<c$,它相对于任何惯性系的速率 $u'$ 就都小于 $c$. 下面是最极端的情况:设粒子在惯性系K中的速度满足 $u_x=c,u_y=u_z=0$,则由式(1-3-3)易得它在惯性系K′的速度满足

$$u'_x=\frac{c-v}{1-v/c}=\frac{c(c-v)}{c-v}=c,\quad u'_y=u'_z=0.$$

所以§1.2讲到的"麦氏理论对相对性原理的挑战"现在就彻底不存在:只要用洛伦兹变换代替伽利略变换,麦氏理论与相对性原理完全可以和谐共存,并行不悖! 现在可以明确指出,麦氏方程天生就没有伽利略协变性:如果从K系变到K′系时采用伽利略变换,那么麦氏方程在K′系的形式将与在K系的形式不同. 但是麦氏方程天生就有洛伦兹协变性,它生来是狭义相对论的天之骄子.

由式(1-3-3)还可求得逆变换式:

$$u_x=\frac{u'_x+v}{1+\frac{v}{c^2}u'_x},\quad u_y=\frac{u'_y}{\gamma\left(1+\frac{v}{c^2}u'_x\right)},$$

$$u_z=\frac{u'_z}{\gamma\left(1+\frac{v}{c^2}u'_x\right)}. \qquad (1-3-3')$$

5. 狭义相对论中存在着若干饶有趣味的运动学效应,最常见的是:① 尺缩效应;② 车库佯谬;③ 钟慢效应;④ 孪生子佯谬. 虽然这些效应都可用洛伦兹变换直接证明(可参阅几乎任一本狭义相对论教材),但存在着一种简单、清晰、深刻得多的、借助于时空几何语言的证明. 本书将在第4章详细讲述.

【选读1-3】

上节曾指出,当 $v<<c$ 时洛伦兹变换近似回到伽利略变换,具体来说就是

(A) $x'=\gamma(x-vt)$ 近似回到 $x'=x-vt$,

(B) $t'=\gamma\left(t-\frac{v}{c^2}x\right)$ 近似回到 $t'=t$.

由于 $v<<c$ 时 $\gamma\approx1$,自然就有 $x'=\gamma(x-vt)\approx x-vt$,即(A)自然成立. 然而要说明(B)也成立就要略费笔墨. 为便于陈述,下面以对话方式讲解,其中乙代表笔者.

甲 由 $\gamma\approx1$ 直接得到的只是

$$t'\approx t-vx/c^2, \qquad (1-3-4)$$

由此又怎能得到 $t'\approx t$?

乙 关键是要说明式(1-3-4)右边第二项可被第一项所忽略,即说明 $t-(v/c^2)x\approx t$.

甲 $t$ 和 $x$ 是被观测事件的坐标,原则上可取任意值,凭什么就有 $|t|>>(v/c^2)|x|$?

乙 先看两个特例. ① 设事件发生在K系的空间坐标原点O,则 $x=0$,自然有 $t-(v/c^2)x=t$;② 设事件发生在K′系的空间坐标原点O′,则 $x'=0$,由 $x'=\gamma(x-vt)$ 得 $x=vt$,代入式(1-3-4)得

$$t'\approx t-(v^2/c^2)t=t(1-v^2/c^2)\approx t.$$

甲 但这两个只是特例. 作为被观测事件的坐标,$x$ 和 $t$ 原则上可各取任何值. 如果 $x$ 很大而 $t$ 很小,式(1-3-4)右边第二项还能被第一项忽略吗?

乙 你涉及问题的要害了. 我的答案是"洛伦兹变换在 $v<<c$ 时近似回到伽利略变换"这一提法总是对的,其准确含义如下:

"在约定的允许误差范围内，对任一被观测事件而言，只要 $v$ 与 $c$ 相比足够小，洛伦兹变换都能近似回到伽利略变换."

理由很简单：这一提法要求你首先给定被观测事件，然后才告诉你 $v$ 要比 $c$ 小多少(这个先后顺序极其重要)．设此事件的 $x$ 与 $t$ 的关系为 $x=Mct$，其中 $M$ 是个很大的(无量纲)数，例如 $10^2$，$10^3$，…….(这就是你说的"$x$ 很大而 $t$ 很小"的准确含义，须知只有同量纲的量方可比较大小.)代入式(1-3-4)便得

$$t'\approx t-\frac{v}{c^2}Mct=t\left(1-\frac{v}{c}M\right),\quad(1-3-5)$$

故

$$t-t'=t-t\left(1-\frac{v}{c}M\right)=t\frac{v}{c}M,\quad(1-3-6)$$

因而 $t'$ 与 $t$ 的相对差别

$$\frac{t-t'}{t}=\frac{v}{c}M.\quad(1-3-7)$$

假定事先约好的允许相对误差为 $\delta$(例如 $\delta=10^{-2}$ 或 $10^{-3}$)，则为使 $(t-t')/t<\delta$，只须

$$\frac{v}{c}<\frac{\delta}{M}.\quad(1-3-8)$$

例如，设 $M=10^3$，$\delta=10^{-2}$，则 $v/c<10^{-5}$. 就是说，只要 $v<10^{-5}c$，对该事件而言就可在允许误差范围内使用伽利略变换.

**甲**　您的分析很有帮助. 美中不足的是，您写式(1-3-6)时略去了式(1-3-5)中 $t'$ 后面的近似号. 严格说来，不写近似号就应补上 $\gamma$，即式(1-3-5)应改为

$$t'=\gamma\left(t-\frac{v}{c^2}Mct\right),$$

这对结果的影响如何?

**乙**　你的意见很对，但按此修改会使推导变得很繁，不过不影响定性结论.

〖选读 1-3 完〗

本书至今一直采用国际单位制. 相对论公式由于经常出现 $v/c$ 而显得冗长，而且运算繁杂. 如果改用一种称为"几何单位制"① 的单位制，公式便可大为简化. 涉及单位制时应该分清"量"和"数". 一个物理量与一个被选作单位的同类量做比较就给出一个数(称为用该单位测该量所得的数). 任何物理书中的绝大多数等式都可以看作数的等式. 几何单位制把真空光速这个量选作速度这一类量的单位，所以，若以 $c$ 代表真空光速在几何制的数值，便有 $c=1$. 本书从现在开始改用几何单位制，这时洛伦兹变换式简化为

$$\text{(a)}\ t'=\gamma(t-vx),\quad \text{(b)}\ x'=\gamma(x-vt),$$
$$\text{(c)}\ y'=y,\quad \text{(d)}\ z'=z,\quad(1-3-9)$$

其中

$$\gamma\equiv\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}.\quad(1-3-10)$$

(续完)

## 参考文献:


[1] Resnick R. Introduction to Special Relativity [M]. New York: John Wiley & Sons Inc, 1968.

[2] 张元仲. 狭义相对论实验基础 [M]. 北京: 科学出版社, 1994.

[3] 梁灿彬，周彬. 微分几何入门与广义相对论(上册) [M]. 北京: 科学出版社, 2006.


① 有志于从单位和量纲理论的高度对几何单位制获得较深入理解的读者可以参阅文献 [3] 附录 A.

(上接 56 页)

# Study on visualization of the electronic probability density in hydrogen atom

NI Xiao-fang, WU Ping-hui, CHEN Fang-fang

(College of Science, Huzhou Teachers College, Huzhou, Zhejiang 313000, China)

**Abstract:** According to the characteristics of abstract and hard to understand of electronic probability density in hydrogen atom in quantum physics, this paper suggests the distributed function of electronic probability density in hydrogen atom including the radial distribution function and angular distribution function. We investigate the distribution law of electronic probability density for visualization by using powerful drawing function of Matlab. The results show that the method reveals the distribution of electronic probability density in hydrogen atom intuitively and vividly. It provides a new way in physics teaching.

**Key words:** hydrogen atom; probability density; visualization; Matlab

《从零学相对论》连载

# 《从零学相对论》连载③

梁灿彬[1]，曹周键[2]
（1. 北京师范大学 物理系，北京 100875；2. 中科院 应用数学所，北京 100190）

## 第2讲 学一点点几何

### §2.1 线元与几何

狭义相对论经常涉及各惯性系之间的坐标变换，面对这种变化纷繁的局面，物理学家使出了从数学家学来的高招——“以不变应万变”. 为此就要抓住“万变不离其宗”的那个“宗”，即是要学会抓住在坐标变换下不变的量，称为不变量（invariant），亦称绝对量. 欧氏空间的常识为此提供重要借鉴. 设L是2维欧氏空间的曲线，以dL代表它的一个元段（见图2-1），d$l$代表dL的长度（称为元段长），d$l^2$代表d$l$的平方［简称为线元（line element）］. 元段dL一经给定，其线元d$l^2$当然与坐标系无关，所以是不变量（绝对量）. 下面再关心线元d$l^2$的表达式. 设$\{x,y\}$是直角坐标系，由图2-1显见

$$\mathrm{d}l^2=\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}x^2. \qquad (2-1-1)$$

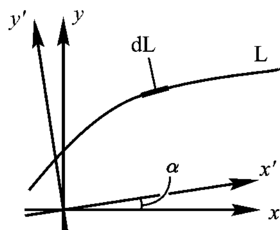



图2-1 欧氏线元表达式在直角坐标变换下不变

如果改用极坐标系$\{r,\varphi\}$，则同一线元d$l^2$的表达式变为

$$\mathrm{d}l^2=\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\varphi^2. \qquad (2-1-2)$$

上两式是同一个线元d$l^2$的表达式，坐标变换所改变的只是线元表达式而不是线元本身. 要使线元表达式不变，新坐标系必须也是直角坐标系，例如，设$\{x',y'\}$是由$\{x,y\}$系转动$\alpha$角而得的新系（仍见图2-1），则容易验证两者之间的坐标变换为

$$x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha,$$
$$y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha, \qquad (2-1-3)$$

故
$$\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}x^2=\mathrm{d}y'^2+\mathrm{d}x'^2, \qquad (2-1-4)$$

因而线元d$l^2$在新系的表达式为

$$\mathrm{d}l^2=\mathrm{d}y'^2+\mathrm{d}x'^2. \qquad (2-1-5)$$

可见线元表达式在直角坐标系的转动变换下形式不变. 其实还有更强的结论：当且仅当采用直角坐标变换（转动加原点平移）时，欧氏线元表达式不变.

在相对论中有非常类似的情况. 先讨论2维时空. 设$p_1$，$p_2$是两个相邻事件，在惯性系K和K′的坐标分别为

$$p_1=(t_1,x_1)=(t_1',x_1'),$$
$$p_2=(t_2,x_2)=(t_2',x_2').$$

令$\mathrm{d}t\equiv t_2-t_1$，$\mathrm{d}x\equiv x_2-x_1$，$\mathrm{d}t'\equiv t_2'-t_1'$，$\mathrm{d}x'\equiv x_2'-x_1'$，则由洛伦兹变换式（1-3-9）得

$$\mathrm{d}t'=\gamma(\mathrm{d}t-v\mathrm{d}x),\quad \mathrm{d}x'=\gamma(\mathrm{d}x-v\mathrm{d}t), \qquad (2-1-6)$$

由此不难验证（习题）

$$-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}x^2=-\mathrm{d}t'^2+\mathrm{d}x'^2, \qquad (2-1-7)$$

定义时空（元）间隔（spacetime interval）d$s^2$为

$$\mathrm{d}s^2\equiv-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}x^2,$$
$$(\text{对国际制为 } \mathrm{d}s^2\equiv-c^2\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}x^2) \qquad (2-1-8)$$

则式（2-1-7）表明时空间隔d$s^2$在洛伦兹变换下形式不变. 可见，至少形式地说，时空间隔很像线元d$l^2$，惯性坐标$t$，$x$很像直角坐标$y$，$x$. 不妨建立如下对应：

时空间隔d$s^2$↔欧氏线元d$l^2$；

惯性坐标$t$，$x$↔直角坐标$y$，$x$.

但“很像”并非全同，时空间隔d$s^2$与欧氏线元d$l^2$表达式的惟一差别就是在d$t^2$前有一负号. 同欧氏线元d$l^2$一样，时空间隔d$s^2$一经选定［由式（2-1-8）定义］就是不变量（绝对量），坐标变换有可能改变的只是它的表达式. 例如，仿照欧氏空间引入极坐标系的做法，现在可用下式引入新坐标系

$\{\psi,\eta\}$：

$$x=\psi\mathrm{ch}\ \eta,t=\psi\mathrm{sh}\ \eta,$$

(其中 ch 和 sh 分别代表双曲余弦和双曲正弦)

(2-1-9)

同一间隔 $\mathrm{d}s^2$ 在新系的表达式变为

$$\mathrm{d}s^2\equiv\mathrm{d}\psi^2-\psi^2\mathrm{d}\eta^2. \qquad (2-1-10)$$

**小结** 存在两个意义的不变性：(1) 欧氏线元 $\mathrm{d}l^2$ 和时空间隔 $\mathrm{d}s^2$ 都是不变量(绝对量)；(2) 欧氏线元(时空间隔)的表达式在直角坐标(惯性坐标)变换下形式不变.

对于欧氏几何，人们关心曲线的长度、两点之间的距离、两直线之间的夹角，……等等. 这些几何性质都由欧氏线元决定：曲线的长度定义为线元 $\mathrm{d}l^2$ 的开方根 $\mathrm{d}l$ 的积分；两点之间的距离定义为两点之间的最短曲线的长度(因而也取决于线元)；两直线之间的夹角定义为弧长与半径长之比(归根结蒂还是由线元决定). 事实上，欧氏几何的所有内容都由欧氏线元决定，简言之就是线元决定几何. 这一结论对非欧几何也成立. 指定一个与欧氏线元不同的线元就定义了一种非欧几何. 线元的改变起着"牵一发而动全身"的作用. 现在，只要把时空间隔 $\mathrm{d}s^2\equiv-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}x^2$ 也看作一种线元[称为闵氏线元，闵氏是指闵可夫斯基(Minkowski)]，它也决定一种几何，与欧氏几何不同，称为(2维)闵氏几何(Minkowski geometry). 定义了闵氏几何的空间称为闵氏空间(Minkowski space). 今后统一用符号 $\mathrm{d}s^2$ 代表线元(但元段长则仍记作 $\mathrm{d}l$)，所以欧氏线元 $\mathrm{d}l^2=\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}x^2$ 将改记作 $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}x^2$.

以上只是为陈述方便而讨论2维情况，不难将讨论推广到维数更高的空间. 读者都熟悉3维欧氏空间，其线元在直角坐标系的表达式为

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2, \qquad (2-1-11)$$

如果改用球坐标系 $\{r,\theta,\varphi\}$，利用该系与直角系的熟知关系

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta, \qquad (2-1-12)$$

由微分运算容易求得欧氏线元 $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2$ 在球坐标系的表达式

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}r^2+r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2). \qquad (2-1-13)$$

我们再次强调，坐标变换改变的只是线元的表达式而不是线元本身. 就是说，式(2-1-13)与(2-1-11)虽然形式不同，但实质一样，都代表3维欧氏线元，可表为连等式

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2=\mathrm{d}r^2+r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2).$$

如果改用第三种坐标系(例如柱坐标系或者更复杂的坐标系)，欧氏线元 $\mathrm{d}s^2$ 的表达式还会取其他更为复杂的形式. 欧氏线元只在直角坐标系才有最简单的表达式 $\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2$. 想象地再补上第4维，把第4个直角坐标记作 $w$，便可写出4维欧氏线元在直角系的表达式

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}w^2+\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2, \qquad (2-1-14)$$

与4维闵氏线元

$$\mathrm{d}s^2=-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2 \qquad (2-1-15)$$

相对应(但请特别注意右边第一项的负号).

类似地，如果在闵氏时空中选取惯性坐标系以外的坐标系，闵氏线元的表达式也要改变. 例如，若选4维球坐标系 $\{t,r,\theta,\varphi\}$，其中 $r,\theta,\varphi$ 仍由式(2-1-12)定义，则闵氏线元的表达式改为

$$\mathrm{d}s^2=-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}r^2+r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2). \qquad (2-1-16)$$

若选更复杂的坐标系，闵氏线元的表达式将更为复杂. 当且仅当选用惯性坐标系时，闵氏线元才有最简单的表达式 $-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2$.

## §2.2 闵氏几何

为方便起见，仍先讨论2维情况. 把 $\mathrm{d}s^2\equiv-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}x^2$ 看作线元似乎意味着曲线的长度应定义为 $\mathrm{d}s$ 的积分，但 $\mathrm{d}t^2$ 前的负号却带来一个微妙之处，因为它导致 $\mathrm{d}s^2$ 符号不定. 图2-2示出了三类曲线. 曲线 $L_1$ 的任一元段都有 $\mathrm{d}s^2>0$，故元段长 $\mathrm{d}l$ 可自然定义为 $\mathrm{d}l\equiv\sqrt{\mathrm{d}s^2}$，曲线 $L_1$ 介于 $a_1$ 和 $b_1$ 点之间的一段的线长(记作 $l_{a_1b_1}$)自然是

$$l_{a_1b_1}=\int_{a_1}^{b_1}\sqrt{\mathrm{d}s^2}. \qquad (2-2-1)$$

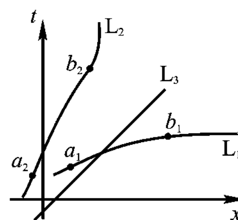



图2-2 闵氏空间的三类曲线

(对国际制，$t$ 轴改为 $ct$ 轴)

但曲线 $L_2$ 的任一元段有 $\mathrm{d}s^2<0$，如果把元段长 $\mathrm{d}l$ 仍定义为 $\mathrm{d}l\equiv\sqrt{\mathrm{d}s^2}$，则 $\mathrm{d}l$ 为虚数，而虚数线长没有意义. 现在应该明确指出，$\mathrm{d}s^2$ 其实只是 $-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}x^2$ 的代表符号，并不代表某个实数 $\mathrm{d}s$ 的平方(个别书用符

号 $\Phi$ 代替 $ds^2$,以防止把它看作某实数的平方这一误解). 记号 $ds$ 并无意义,它总是连同右上角的"2"字一同出现(但不代表平方),有意义的只是整体记号 $ds^2$. 大多数文献之所以用记号 $ds^2$ 而不用 $\Phi$,目的在于让人感到"$ds^2$ 像 $dl^2$",但并非像到可以把 $ds^2$ 看作 $ds$ 的平方的程度. 明确这点之后,我们约定把元段长 $dl$ 定义为 $dl \equiv \sqrt{-ds^2}$(请注意 $-ds^2>0$),把曲线 $L_2$ 介于 $a_2$ 和 $b_2$ 点之间的一段的线长定义为

$$l_{a_2b_2} = \int_{a_2}^{b_2} \sqrt{-ds^2}. \qquad (2-2-2)$$

最后,曲线 $L_3$ 的任一元段有 $ds^2=0$,我们定义其元段长为零,因而 $L_3$ 的任一线段的线长为零. 表面看来似乎很奇怪:这么长长的一条曲线 $L_3$ 的线长竟然为零? 其实这正是闵氏几何与欧氏几何的一个重要区别. 用欧氏眼光看问题,$L_3$ 的确很长,但用闵氏眼光来看,由定义可知其长度就是为零.

综上所述可知任一类型的曲线段 $ab$ 的线长都可表为

$$l_{ab} = \int_a^b \sqrt{|ds^2|}, \qquad (2-2-3)$$

因为第一类曲线有 $ds^2>0$,上式回到式(2-2-1);第二类曲线有 $ds^2<0$,上式回到式(2-2-2);第三类曲线有 $ds^2=0$,上式给出 $l_{ab}=0$. 以上讨论不难推广至4维情况,对三类曲线依次命名如下:

(1) 任一元段都有 $ds^2>0$ 的曲线称为类空曲线(spacelike curve);

(2) 任一元段都有 $ds^2<0$ 的曲线称为类时曲线(timelike curve);

(3) 任一元段都有 $ds^2=0$ 的曲线称为类光曲线(lightlike curve,又称 null curve).

此外也存在这样的曲线,其上某些元段有 $ds^2>0$ 而另一些元段有 $ds^2<0$ 或 $ds^2=0$,我们戏称这些曲线为不伦不类的曲线.

图2-3是欧氏空间与闵氏空间的对比图. 为画图方便,只对比3维欧氏空间与3维闵氏空间. 欧氏空间的任一点A称为一个空间点,可用直角坐标表为

空间点 $A=(z,x,y)$.

由于闵氏空间必有一维代表时间,所以闵氏空间又称为闵氏时空(Minkowski spacetime). 不妨认为闵氏空间是数学家的称谓,而闵氏时空是物理学家的称谓. 时空中的任一点 $p$ 称为一个时空点(spacetime point),代表一个事件,可用惯性坐标表为

时空点 $p=(t,x,y)$.

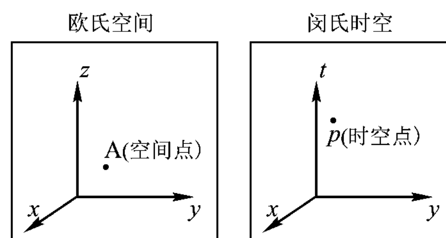



图2-3　欧氏空间与闵氏时空对比

你看,从一个纯物理问题出发,经过如此这般的三分析两讨论,"一不留神"地竟然就变成了一个几何问题,就可以借用数学做许多极有帮助的讨论和计算. 尽量用几何工具讨论时空问题是国际相对论界的流行趋势(其好处多得不计其数),也是本书的一大特色.

## §2.3　球面几何

一切不同于欧氏线元的线元所决定的几何都可称为非欧几何. 从这一意义上说,闵氏几何也是非欧几何. 不过,由于它与欧氏几何很像,线元之间只有一个负号之差,通常也把闵氏几何称为伪欧几何(pseudo-Euclidean geometry). 本节再介绍一种很常用的非欧几何,即球面几何,这是一种2维非欧几何,其线元可用坐标系{$x,y$}表为

$$ds^2 = dx^2 + \sin^2 x dy^2, \qquad (2-3-1)$$

与欧氏线元的惟一区别是 $dy^2$ 前要补一个因子 $\sin^2 x$. 虽然你可能从未见过这样的线元表达式,但下面的一段会让你发现这其实是很常见的线元.

3维欧氏线元在球坐标系{$r,\theta,\varphi$}的表达式为

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \qquad (2-3-2)$$

设S是以原点为心、以1为半径的球面,dL是躺在S上的任一曲线元段,当然也可把它看作3维欧氏空间的元段,故式(2-3-2)就是这一特殊元段的线元在球坐标系的表达式. 由于元段躺在球面上,其上每点都有 $r=1$,故式(2-3-2)简化为(改用 $d\hat{s}^2$ 代表)

$$d\hat{s}^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2. \qquad (2-3-3)$$

球面是个2维空间,因为要决定其上一点需要2个坐标($\theta$ 和 $\varphi$). 上式实质上是3维空间的欧氏线元在镶嵌于其中的2维球面所诱导而生的线元,称为(标准)球面线元,描述球面这个2维空间的几何(球面几何). 人们在讨论球面上的问题时,无论自觉与否,都在默认其几何由线元(2-3-3)决定. 请注意式(2-3-3)与式(2-3-1)实质一样(差别只

在于坐标的记号从 $x$,$y$ 改为 $\theta$,$\varphi$,而这毫无影响),所以式(2-3-1)的确是球面线元.

应该指出,虽然从3维欧氏线元诱导出球面线元的讲法很直观,但球面几何本身完全可以不依托于3维空间而独立存在,它无非就是由式(2-3-1)表示的一种2维几何.

## §2.4 曲率

利用线元可以定义一个称为曲率(curvature)的张量,又称黎曼张量,是由线元所决定的诸多几何性质中很重要的一个性质. 本书读者不必知道什么是张量,只须记住以下四点.

(1) 各点曲率都为零的空间称为平直空间(flat space),否则称为弯曲空间(curved space). 如果空间是时空(其中一维代表时间),则平直空间和弯曲空间也分别称为平直时空(flat spacetime)和弯曲时空(curved spacetime).

(2) 欧氏空间是平直空间,闵氏时空是平直时空.

(3) 球面是2维弯曲空间的简单例子. 球面上任一点的曲率都非零.

(4) 狭义相对论以闵氏时空为背景时空,而广义相对论则以弯曲时空为背景时空(详见第6讲). 在弯曲时空中,曲线的类空、类时和类光性的定义与闵氏时空相同,线长仍由线元绝对值 $|ds^2|$ 的积分决定,即式(2-2-3)同样适用于弯曲时空.

## §2.5 测地线

欧氏空间的曲线中有一类最为简单,这就是直线. 直线是这样的曲线,它在直角坐标系中的任意两个坐标都有线性关系. 以3维欧氏空间为例,直角坐标 $x$,$y$,$z$ 满足下式的曲线就是直线:

$$y = ax + b,\quad z = cx + d.$$

(其中 $a$,$b$,$c$,$d$ 是常实数) (2-5-1)

由于任意两个直角坐标系之间的坐标变换都是线性变换,所以,只要式(2-5-1)对一个直角系成立,则它对任一直角系也成立. 这就保证直线是绝对的概念,不存在某系认为是直线而另一系认为不是直线的情况.

欧氏空间之所以可以定义直线,是因为它有一类简单的、与众不同的坐标系,这就是直角坐标系. 类似地,闵氏时空也有一类简单的、与众不同的坐标系,这就是惯性坐标系,因而也可用类似方法定义直线. 以4维闵氏时空为例,其直线是这样的曲线,它的惯性坐标 $t$,$x$,$y$,$z$ 之间有如下的线性关系:

$$x = a^1 t + b^1,\quad y = a^2 t + b^2,\quad z = a^3 t + b^3.$$

(其中 $a^1$,$b^1$,$a^2$,$b^2$,$a^3$,$b^3$ 是常实数) (2-5-2)

由于任意两个惯性坐标系之间的坐标变换都是线性变换(洛伦兹变换),所以闵氏时空中的直线概念也是绝对的.

欧氏空间和闵氏空间都是平直空间. 对于弯曲空间,不存在像直角坐标系或惯性坐标系那样的与众不同的坐标系,直线难以定义. 然而,弯曲空间的曲线中也存在一类最简单的曲线,称为测地线(geodesic). 由于数学知识不够,此处不拟给出测地线的定义,只想指出以下三点.

(1) 把测地线定义用于平直空间,结果正是直线. 可见测地线概念是直线概念向弯曲空间的推广.

(2) 不难验证球面上的大圆弧满足球面上测地线的定义. 事实上,球面上的曲线是测地线当且仅当它是大圆弧.

(3) 鉴于欧氏空间存在"两点之间直线最短"的结论,人们往往把测地线称为短程线. 然而这一称谓容易误导. 下面仅举两个反例.

第一个反例是关于球面的. 下面以对话形式阐述,其中乙代表笔者.

甲 球面上的大圆弧(测地线)一定是其首末两点之间的最短曲线,对吗?

乙 不对. 图2-4中的大圆弧SAND就不是点S与D之间最短的线,因为大圆弧SED更短.

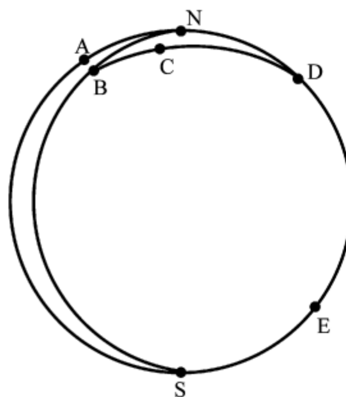



图2-4 测地线未必是极短线

甲 我把"最短"改为"极短"总对了吧? 我的"最短"和"极短"是仿照一元微积分中的"最小值"和"极小值"说的,函数在定义域中可以有若干个极小值,其中最小的一个叫最小值. 就是说,当我说"SAND是极短线"时,是只与其邻近曲线比较的

结果.

乙　问题就在于"大圆弧 SAND 是极短线"这一结论也不对，因为跟它紧邻的曲线 SBCD 比它还短(其中 BCD 是 B，D 点间的一个大圆弧)，理由如下.

SBCD 长 = SB 长 + BCD 长，

SAND 长 = SA 长 + AN 长 + ND 长，

故

SAND 长 - SBCD 长 = SA 长 + AN 长 + ND 长 - SB 长 - BCD 长 = (BN 长 + ND 长) - BCD 长 = BND 长 - BCD 长 > 0，　(2-5-3)

[其中第二步用到 SA 长 = SB 长(总可选这样的 A，B 点)及 AN 长 = BN 长，末步(即 > 号)是因为 BCD 和 BND 都是连结 B，D 点的线，而前者是测地线后者不是，故 BND 长 > BCD 长.] 式(2-5-3)表明测地线段 SAND 并非短程线，连"极短"也不是.

测地线段 SAND 之所以不是"极短"，关键在于线上包含南极 S 和北极 N，两者组成线上的一个"共轭点对"，即存在从 S 到 N 的、与测地线 SAN 无限邻近的测地线 SBN. 可以证明，只要大圆弧上没有共轭点对，它必定是最短线. 例如，大圆弧 SA，SB 和 SED 分别都是最短线.

上述例子已经表明把测地线称为"短程线"至少不够准确. 更有甚者，在闵氏时空及弯曲时空中存在大量的类时测地线，它们不但不是短程线，而且还是长程线. 图 2-5 就是闵氏时空的简单例子. 图中的 $paq$ 是一条类时测地线(类时直线)，我们来证明它是 $p$，$q$ 点之间所有类时曲线中的最长者，为此只须证明它比任一连结 $p$，$q$ 点的类时曲线(例如 $pbq$)都长. 先假定 $pbq$ 线躺在 $t-x$ 平面上. 用许多与 $x$ 轴平行的直线把测地线 $paq$ 和非测地线 $pbq$ 分成许多小元段，由类时线长定义式(2-2-2)及闵氏线元表达式可知元段 $pa$ 和 $pb$ 的线长依次为

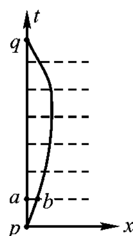



图 2-5　类时测地线 $paq$ 是 $p$，$q$ 间最长的类时线

$$(\mathrm{d}l)_{pa}=\sqrt{-\mathrm{d}s^2|_{pa段}}=\sqrt{(\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}x^2)|_{pa段}}=\sqrt{(t_a-t_p)^2-(x_a-x_p)^2}=t_a-t_p,\quad(2-5-4)$$

$$(\mathrm{d}l)_{pb}=\sqrt{(\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}x^2)|_{pb段}}=\sqrt{(t_b-t_p)^2-(x_b-x_p)^2}<t_a-t_p=(\mathrm{d}l)_{pa}.\quad(2-5-5)$$

[其中倒数第二步是因为 $x_b-x_p\neq0$ 且 $x_b-x_p<t_b-t_p=t_a-t_p$.] 上述结果也适用于其他任一元段，所以 $l_{paq}>l_{pbq}$. 不难看出上述结论也适合于 $pbq$ 线不躺在 $t-x$ 平面上的一般情况. 可见类时测地线不但不是最短线，而且(与连结首末两点的所有类时线相较)还是最长线!

最后介绍关于测地线的一个重要定理(证明见文献[1]中的定理 3-3-4)，本文 §6.1 要用到.

**定理 2-1**　给定一点 $p$ 和 $p$ 点的一个矢量 $\boldsymbol{v}$，存在惟一的测地线，它经过 $p$ 点，而且在 $p$ 点与 $\boldsymbol{v}$ 相切.

下面用简单例子帮助读者接受这一定理. 首先，对欧氏空间及闵氏时空，给定一点 $p$ 和 $p$ 点的一个矢量 $\boldsymbol{v}$ 后，显然存在且仅存在一条直线(测地线)，它经过 $p$ 点而且在 $p$ 点与 $\boldsymbol{v}$ 相切(图 2-6a). 其次，给定球面的一点 $p$ 和 $p$ 点的一个矢量 $\boldsymbol{v}$ 后，显然存在且仅存在一个大圆弧(测地线)，它经过 $p$ 点而且在 $p$ 点与 $\boldsymbol{v}$ 相切(图 2-6b).

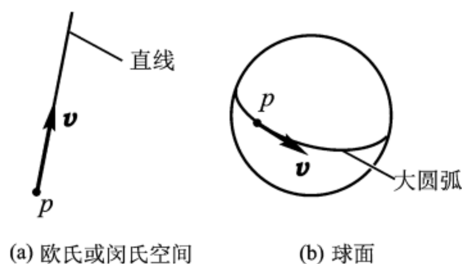



图 2-6　定理 2-1 例证

为了便于读者记住这个定理，我们把它归结为如下的"七字真言"：

一点一矢定一测.

(第二讲完)

## 参考文献：

[1]　梁灿彬，周彬. 微分几何入门与广义相对论(上册)[M]. 北京：科学出版社，2006.

《从零学相对论》连载

# 《从零学相对论》连载④

梁灿彬[1]，曹周键[2]

(1. 北京师范大学 物理系，北京 100875; 2. 中科院 应用数学所，北京 100190)

## 第3讲 相对论的几何表述

### §3.1 世界线和时空图

在牛顿力学中，当物体的形状和大小对所关心的问题影响不大时，可以把它看作有质量而无大小的对象，每个时刻只占领空间的一点，这种模型化后的物体称为质点. 进入相对论后，质点的概念仍然保持，但它(在惯性系中)只能以亚光速运动(理由详见§5.9). 此外还有一种很重要的点状对象，其质量为零①(因而不叫质点)，在惯性系中总以光速运动. 这种对象称为光子(photon). 质点和光子总称为粒子(particle). 这里的粒子是模型语言的粒子，与粒子物理学的具体粒子(质子、中子等)虽有联系但不相同，是完全没有大小的点.

设想你自己是个质点，则你在某一时刻位于某处就是发生在你身上的一个事件，所以你的全部历史由一连串相继发生的事件组成. 既然每一事件都是一个时空点，你的全部历史便是时空中的一条曲线(积点成线). 推而广之，任何粒子的全部历史都是时空中的一条曲线，称为该粒子的世界线(world line).

时空和世界线比较抽象，通常用时空图来直观表示. 时空图中应画上(至少心中明确)某个惯性系的坐标轴，这个坐标系称为这个时空图的基准坐标系②. 由于是时空图，时间 $t$ 这一维不可或缺，约定把 $t$ 轴画成竖直向上(代表该系的时间流逝). 然而，即使采用立体画法，平面上最多也只能表现3个坐标轴，所以空间坐标轴只能画两个，例如 $x$ 和 $y$③，都与 $t$ 轴正交. 下面举4例帮助理解时空图.

例1 图3-1中躺在 $t-x$ 面内的45°斜直线(点划线)代表什么粒子的世界线?

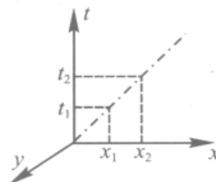



图3-1 点划线是光子的世界线

解 由图可知该粒子的 $y$，$z$ 坐标恒为零，$x$ 坐标随 $t$ 线性增大，所以它位于 $x$ 轴上而且沿 $x$ 正向匀速运动. 由图又知

$$\text{粒子速率}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{t_2-t_1}{t_2-t_1}=1(=c), \quad (3-1-1)$$

可见该粒子以光速运动. 结论: 图中的斜直线可解释为沿 $x$ 轴正向运动的光子的世界线.

注1 图3-1是几何单位制中的时空图. 若用国际单位制，纵坐标应从 $t$ 改为 $ct$.

例2 以图3-2的类时曲线 $L_1$ 为世界线的粒子是质点还是光子? 类空曲线 $L_2$ 呢?

解 曲线 $L_1$ 上任一点 $p$ 的、切于该曲线的矢量(图中的箭头)都比45°更陡(斜率更大)，仿照式(3-1-1)的讨论可知该粒子在每一时刻的速率 $u$ 都为亚光速(即 $u<1$)，所以 $L_1$ 是某个质点(而不是光子)的世界线. 反之，从曲线 $L_2$(类空曲线)在任一点 $q$ 的切矢看出，假定它是某一粒子的世界线，该粒子必定超光速，而超光速粒子在相对论中不存在，可见 $L_2$ 不是任何粒子的世界线.

① 在相对论的早期发展中，质量有"静质量"和"运动质量"之分. 后来，包括爱因斯坦在内的越来越多的作者都放弃了"运动质量"的概念，谈到质量时一律是指静质量(见§5.5). 正文中的质点质量也是指静质量.

② 也可用非惯性坐标系为基准坐标系，但应明确说明.

③ 如果运动在某一空间方向(例如 $z$ 向)无分量，只画其他两轴便可. 如果运动在 $x$，$y$，$z$ 三个方向上都有分量，必要时可以"多侧面"地画时空图，例如"$t-x-y$ 图"，"$t-x-z$ 图"，等等.

小结：质点的世界线是类时曲线，反之亦然；光子的世界线是类光曲线；类空曲线不能充当世界线.

对于 2 维时空（以 $t$，$x$ 为时、空坐标），过任一时空点 $p$ 只有两条光子世界线（斜率分别是 +1 和 -1）；对于 3 维时空，过一点 $p$ 有无限多条光子世界线，以任一条为母线就扫出一个以 $p$ 为顶点的圆锥面，称为 $p$ 点的光锥面（2 维曲面）. 对于 4 维时空，每点 $p$ 的光锥面是一个 3 维锥"面"（图 3-3，图中只能压缩一维）. 只要知道一点的光锥面，就能判断过该点的曲线在该点的切矢的类时、类空和类光性，就可以避免把在该点为类空的曲线误以为是世界线.

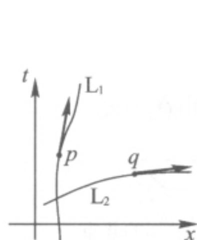



图 3-2 以惯性系为基准系的时空图. $L_1$ 是质点的世界线，$L_2$ 不是世界线

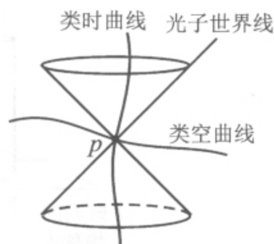



图 3-3 $p$ 点的光锥面

为了帮助读者熟练掌握空间语言（空间图）与时空语言（时空图）之间的"翻译"工作，我们再提一个反方向的"翻译"问题——请读者从给定的空间图出发画出相应的时空图.

**例 3** 某人（看作质点）静止于地面，一只苍蝇绕他做圆周运动［图 3-4（a）］，试画出人和蝇在时空图中的世界线（选地面系为基准）.

**解** 因为人相对于地面静止，他的世界线自然是竖直线. 至于苍蝇的世界线，读者也都能想到应是一条螺旋线［图 3-4（b）］. 但是画图时还有若干不确定性. 首先，这条螺旋线的螺距是均匀的还是不均匀的？这取决于苍蝇的圆周运动是否匀速率. 然而这个问题无法从空间图［图 3-4（a）］找到答案（空间图不含此信息）. 只有当出题人在空间图旁附一句话"苍蝇做匀速圆周运动"，你才可以把苍蝇的世界线画成等螺距螺旋线. 这时又出现第二个问题：螺距该多大？在空间图中同样找不到答案，除非出题人再附上一句话"苍蝇的速率是 0.1 m/s". 这一讨论表明，空间图包含的信息量对绘制时空图未必足够. 反之，如果先给你时空图，只要把它从上到下压缩为一个平面图，本质上就得到空间图. 更有甚者，如果你从时空图底部开始匀速地向上看，你还能看到运动的全过程. 建议读者立刻以图 3-4（b）为例试试看，你是否看到"人一直不动而苍蝇绕着他做匀速圆周运动"这一过程？以上讨论表明时空图含有比空间图更多的信息.

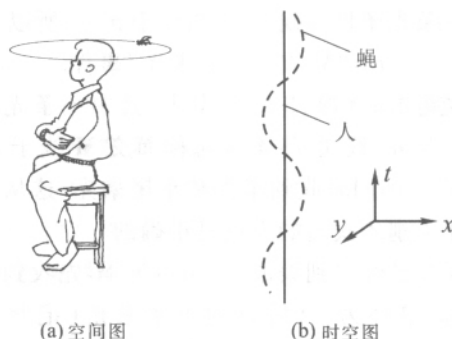



图 3-4 人静止于地面，蝇绕人做匀速率圆周运动

**例 4** 用时空图重新审视"爱因斯坦列车"的雷击同时性问题（见图 1-2 及相应文字）.

**解** 图 3-5（b）是以地面系为基准的时空图，现在介绍画图过程. 地面的点 A，M，B［见图 3-5（a）］相对于地面系皆静止，故世界线都是竖直线. 列车的点 A′，M′，B′都以同一速度 $\boldsymbol{v}$ 相对于地面运动，故世界线是三条斜率相同的直线（斜率为 $1/v$），可用下法画出.

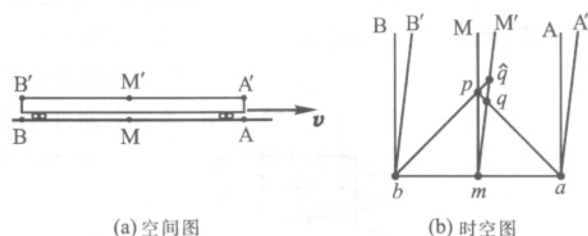



图 3-5 M 同时收到车头、车尾来光，但 M′不同时收到

（1）在 A 线上任选一点 $a$ 代表"雷击车头"事件.（再次提醒：务必注意大、小写字母的区别——A 代表空间点，$a$ 代表时空点，是发生在 A 处的一个事件.）由于前已约定 A 是雷击时 A′在地面的印记（见图 1-2），所以 $a$ 也代表"A′与 A 相遇"的事件，因而 A′线是过 $a$ 点的、斜率为 $1/v$ 的斜直线.

（2）以 $b$ 代表"雷击车尾"事件，它当然应是 B′线与 B 线的交点，但如何确定此点？由于事件 $b$ 和 $a$ 相对于地面系同时发生，而图 3-5（b）的任一水平线上各点代表（对地面系而言）同时发生的事件（因为它们有相同的 $t$ 值），所以，过 $a$ 点的水平直线与 B 线的交点就是 $b$.

（3）以 $m$ 代表 M′与 M 相遇的事件. 对地面系而言，这一事件同时于事件 $a$，因此应在水平线 $ab$

上，所以 $ab$ 线与 M 线的交点就是 $m$. 由此可画出 M′线.

车头受雷击时(事件 $a$)向四面八方发射光子，其中一条光子世界线与 M 线交于 $p$ 点，所以

$p$ = "M 收到车头来光"事件.

车尾受雷击时(事件 $b$)也发光，其中一条光子世界线由于与 $ap$ 线关于 M 线对称而交 M 线于 $p$，可见观者 M 的确同时收到车头和车尾来光. 这从另一侧面印证了刚才找出的 $b$ 点是正确的.

现在已经水到渠成. 由图可见 M′先收到车头来光(记此事件为 $q$)后收到车尾来光(记此事件为 $\hat{q}$)，可见火车系认为事件 $a$,$b$ 并不同时.

注2 刚才讲过，图 3-5(b)的任一水平线上各点代表(对地面系)同时发生的事件. 通常称这些水平线为(地面系的)同时线. 至此只涉及 1 维空间，即 2 维时空 $t-x$. 推广至 2 维空间，即 3 维时空 $t-x-y$，同时线就发展为同时面，见图 3-6，每一同时面(如 $\Sigma_{t_1}$)代表某一时刻(如 $t_1$)发生的所有事件. 再推广至最常用的 3 维空间，即 4 维时空 $t-x-y-z$，同时面理应改称为"同时体"，代表同一时刻发生的所有事件的集合，亦即代表该时刻的全空间. 但时空图必须压缩掉一个空间维，故图中仍表现为一张面，而且习惯上也仍称为同时面.

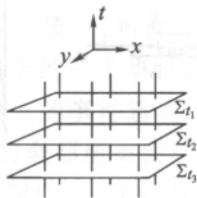



图 3-6 每一同时面代表一个时刻的全空间

一个粒子在 3 维语言中是个点(0 维对象)，在 4 维语言中就是一条线(1 维对象). 考虑一把静止于地面的"无限细"尺子(1 维对象)，它的每点的全部历史在(以地面系为基准的)时空图中就是一条竖直线，所以尺子的全部历史就由一个(2 维)平面代表(图 3-7)，称为尺子的世界面(world sheet)，它与任一同时面 $\Sigma_t$ 的交线就代表地面系认为的、$t$ 时刻的(1 维)尺子. 再看地球表面(2 维球面)，它的每点的历史由一条竖直线代表，地球表面所有点的世界线的总体便是图 3-8 的圆柱面(地球表面的世界面). 你也许会觉得有什么东西不对，因为任一同时面 $\Sigma_t$ 与这个圆柱面的交集本应代表 $t$ 时刻的地球表面(2 维球面)，但图中的交集却是个(1 维)圆周！问题仍然出在时空图至多只能表现 2 维空间，只要自己在头脑中补上第 3 个空间维(比如说，$z$ 轴)，这圆周就代表 2 维球面. 如果愿意，你还可以补画人造地球卫星的世界线(图 3-9).




图 3-7 尺子的世界面

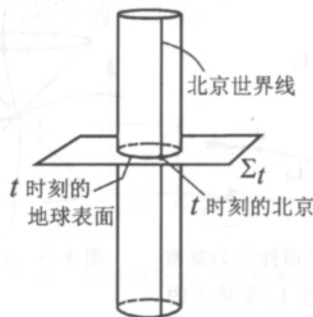



图 3-8 圆柱面是地球表面的世界面(压缩掉一维)




图 3-9 人造卫星世界线(地球世界面仍压缩掉一维)

## §3.2 惯性观者、参考系和坐标系

进行物理观测的人叫观察者. 通常把观察者模型化，即看成质点，简称观者(observer). 为了观测，观者要携带一个走时准确的钟，叫标准钟(standard clock)，该钟的读数称为该观者的固有时(proper time). 推而广之，可以认为任一质点(不一定是人)

都携带一个标准钟，每个质点都有自己的固有时，都可起到观者的作用.

然而，什么叫做“走时准确”？下面用几何语言给出明确定义，这也就是标准钟的定量定义.

**定义1**　设钟在自己世界线任意两点 $p_1$ 和 $p_2$ 的读数分别是 $\tau_1$ 和 $\tau_2(>\tau_1)$（见图3-10）. 如果

$$\tau_2-\tau_1=\text{世界线 } p_1p_2 \text{ 段的线长 } l_{p_1p_2}=\int_{p_1}^{p_2}\sqrt{-\mathrm{d}s^2}, \quad (3-2-1)$$




图3-10　标准钟定义

此钟就称为一个标准钟.

**注3**　上式表明世界线上任一元段的固有时间与元段线长的关系为

$$\mathrm{d}\tau=\sqrt{-\mathrm{d}s^2}. \quad (3-2-2)$$

若光速 $c$ 不取为1，则上式应改为

$$\mathrm{d}\tau=\sqrt{-\mathrm{d}s^2/c^2}. \quad (3-2-2')$$

式(3-2-1)则应改为

$$(\tau_2-\tau_1)=\int_{p_1}^{p_2}\sqrt{-\mathrm{d}s^2/c^2}. \quad (3-2-1')$$

**注4**　上述定义涉及线长这一几何性质，在通常教科书中很少见，但可以证明式(3-2-1)中的 $\tau$ 与教科书中的固有时完全一致.

**注5**　有必要分清与钟有关的两个概念——走时率(rate)和初始设定(setting)，前者反映走时的快慢，后者则是对零点的指定. 标准钟只对走时率提出要求（世界线上任意两点的读数差等于线长）. 我国曾一度实行夏时制，规定某月某日零时“把钟拨快一小时”. 这“快”字有可能使人误以为要提高走时率，其实只是改变初始设定. 事实上，你为你的手机调整时间的操作也只是在改变初始设定，你是无法改变手机的走时率的.

现在介绍惯性观者的概念. 早在伽利略时代，物理学家就已认识到物体的运动有惯性运动与非惯性运动之分. 从教学法的角度，不妨把相对性原理做如下的重新表述.

相对性原理实质上包含以下两部分内容（假设）：

(1) 所有观者可以分为两类，即惯性观者(inertial observer)和非惯性观者. 这种区分无须借用其他物体作为参考，所以说是绝对的区分. 你可以指着任一观者问：这是否惯性观者？答案非是则否，泾渭分明，绝不模棱两可.

(2) 所有惯性观者互相平权，不存在任何特殊的、优越的、与众不同的惯性观者. 特别地，没有一个惯性观者可以被认为处于绝对静止的状态.

然而，什么观者才算是惯性观者？或者说，惯性观者与非惯性观者的根本区别是什么？想象你置身于远离各个星球（因而引力可以忽略）的飞船内. 只要你开动发动机（引擎），你就是个非惯性观者，你的身体就会或多或少地有不舒适的感觉. 反之，只要发动机完全停止工作，你就是个惯性观者，不舒适感就会消失. 请注意你只须根据自己的感觉就能判断自己在做惯性运动与否，完全不必依靠观察窗外的景物（所以说惯性运动与否的区别是绝对的）. 当然也可以举日常生活的例子. 假定你正在驾车，当汽车启动、刹车或拐弯时，你会或多或少地有不舒适感，这时你是个非惯性观者. 反之，当汽车平稳地行驶在笔直又平坦的路面时，你是个惯性观者. 读者可能觉得以上描述过于直观、粗略而有失定量性，但这种描述确实能够说明观者的确可以分为两类. 以上关于观者的讨论也适用于质点（物体）：质点也可以分为两大类：①做惯性运动的质点（简称惯性质点或自由质点）；②做非惯性运动的质点（简称非惯性质点）.

你不是很想知道惯性观者（质点）的更为准确的、定量的定义吗？下面就是在狭义相对论框架内的惯性观者的数学定义：在闵氏时空中，当且仅当观者的世界线是类时测地线时，这个观者是惯性观者（自由质点）. 这一定义不但已经通过了无数（实验的以及理论内部自洽性的）考验，而且非常符合美学原则，因为，从物理角度看，惯性观者是既特殊又最简单的一类观者；从数学角度看，类时测地线是既特殊又最简单的一类类时曲线.

观者（无论惯性与否）的任务是观测. 观测又可分为两大类. 观者对发生在自己身上的事件的观测称为直接观测，亦称当时当地观测，是最简单、最明确的观测. 如果事件发生在观者身外，他当然也可能

听到或看见，从而也可进行观测和记录，这称为间接观测. 在理论方面，狭义相对论中高速运动物体的视觉形象问题就属于间接观测范畴( 详见 §4. 4) ; 在实用方面，所有天文观测都属于间接观测. 间接观测必定涉及从事件到观者的信号传递( 例如用声或光) ，要花费一定时间，讨论起来比较复杂. 此处只讨论直接观测. 为了能对发生在任何地点的事件进行观测和记录，就需要处处设置观者( 每一观者带一标准钟) ，这些无处不在的观者的集合( 总体) 就构成一个参考系. 参考系内的每个观者都 "枕戈待命"地随时准备用自己的钟对发生在自己身上的事件做记录，所以爱因斯坦曾说过 "在我的相对论里，我的空间每一点都安放了钟; 但实际上在我的房间里，甚至连一个钟都没有。" ( 那时爱因斯坦经济还很拮据，虽然生活在号称钟表王国的瑞士，却买不起一个钟. ) 以地面惯性参考系为例，它由无处不在的、相对于地面静止的惯性观者组成( 图 3 – 11 画出了其中 5 个观者的世界线) . 设炮仗爆炸事件 $a$ 发生在观者 A 身上，他立即记下自己的标准钟在爆炸时的读数 $\tau_a$，并把它定义为事件 $a$ 在该参考系的时间坐标，记作 $t_a$，即 $t_a \equiv \tau_a$( A) ( 括号内的 A 代表 A 钟的读数) . 为了进一步定量描述事件 $a$ 的发生点( 即 A 的所在地) ，可以任选一个观者( 记作 O) 为原点建立直角坐标系( 坐标轴相对于地面系无转动) ，这样就得到一个惯性坐标系$\{t, x, y, z\}$ ( O 的世界线就充当 $t$ 坐标轴) ，称为地面惯性参考系内的一个惯性坐标系( 图 3 – 11) ，事件 $a$ 就可以用时空坐标表为

$$a = ( t_a, x_a, y_a, z_a) .$$

一个惯性参考系内可以有很多惯性坐标系，因为通过以下三种做法都可获得该参考系内的另一惯性坐标系: ① 让 3 个坐标轴( 统一地) 做一个空间转动; ② 改变空间坐标原点( 选另一惯性观者为空间坐标原点) ; ③ 把图 3 – 11 的 4 维坐标原点 $o$( 小写) 移至观者 O( 大写) 的世界线的另一点.

在不必细分惯性参考系和惯性坐标系时，可以笼统地称之为惯性系.

现在遇到一个重要问题 设事件 $a$，$b$ 位于图3 –11的某个水平面上. 由于每个水平面要代表一张同时面( 等 $t$ 面) ，$a$，$b$ 点在该坐标系的时间坐标应相等，即应有 $t_a = t_b$，其中 $t_a \equiv \tau_a$( A) ，$t_b \equiv \tau_b$( B) . 然而，每个标准钟( 作为单个的钟) 的初始设定完全任意，所以并不保证 $t_a = t_b$. 为了解决这一问题，我们约定对同一参考系内的各钟要事先施行同步操作，即要求各钟在任一同时面上的读数必须相同. 满足这一要求的各钟称为已同步的. 由于各钟的世界线介于任意两个同时面之间的线段长度相等，同步操作具有一劳永逸性: 只要各钟在某一同时面上读数相等，它们就已同步. 乍看起来可用下法简单地实现同步: 任选一钟 A 作为 "带头羊"，持有该钟的观者在把自己的钟设定为零( 事件 $a$) 的同时告知另一钟 B "你现在立即把钟调到指零". 但是，"告知"就是发出某种信号，而任何信号的传播都需要时间，若以 $b$ 代表 B 接到通知的事件，则 $b$ 与 $a$ 不会在同一张同时面上. 所以，如果 B 执行命令，即在事件 $b$ 把自己的钟设定为零，必然达不到同步的要求. 可见同步操作在相对论中是个并非平凡的过程. 下面介绍一种原则上可行的同步操作法 [称为雷达法( radar method) ]: 观者 A 事先( 用任意方式) 告知 B "你在身上装一面反射镜，当镜子接收到我发的光时把你的钟调零. "然后 A 在适当时刻向 B 发光( 事件 $a_1$) ，它到达 B 时被反射( 事件 $b$，见图3 – 12) . 以 $a_2$ 代表 A 回收到反射光的事件，$a$ 代表 A 线上 $a_1a_2$ 段的中点( 以线长衡量) ，则 A 在该点把自己的钟调零便可保证 B 钟与 A 钟同步.

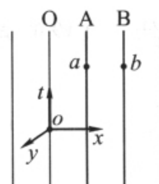



图 3-11 地面参考系内的惯性坐标系 $\{t, x, y, z\}$

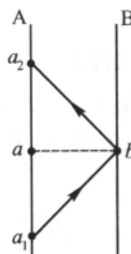



图 3-12 钟同步的雷达法

[选读 3 – 1]

为了尽量保证后续内容的清晰性，刚才是先介绍惯性观者，再以此为基础介绍惯性参考系和坐标系( 见下节) . 这种讲法的好处将会逐渐显现. 当然，不用惯性观者概念也能对惯性系下定义( 而且这是通常的讲法) ，这定义如下.

与其他物体距离足够远( 因而不受任何物体的作用) 的质点称为孤立质点( 或自由质点) . 如果孤立质点相对于某个参考系做匀速直线运动，这个参考系就称为惯性参考系，简称惯性系.

采用这一定义后，惯性观者的定义就变得非常简单: 相对于惯性系做匀速直线运动的观者称为惯性观者.

[选读 3 – 1 完]

( 第 3 讲未完，待续)

第31卷第11期 大 学 物 理 Vol.31 No.11
2012年11月 COLLEGE PHYSICS Nov. 2012

《从零学相对论》连载

# 《从零学相对论》连载⑤

梁灿彬[1],曹周键[2]
(1. 北京师范大学 物理系,北京 100875; 2. 中科院 应用数学所,北京 100190)

## §3.3 光速不变的4维表述

用惯性坐标系K可自然定义任何粒子的速率. 设$L$是粒子的世界线(图3-13),其任一元段dL的线元可表为

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2. \quad (3-3-1)$$

以$p$代表元段的起点,则粒子在时刻$p$相对于惯性系K的速率自然定义为

$$u \equiv \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}}{\mathrm{d}t}. \quad (3-3-2)$$

图3-13 粒子世界线上的元段

于是式(3-3-1)可改写为

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2\left(1 - \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}t^2}\right) = -(1-u^2)\,\mathrm{d}t^2. \quad (3-3-3)$$

以符号"⇔"代表"等价于",则上式表明:

$u=1 \Leftrightarrow \mathrm{d}s^2=0 \Leftrightarrow$ 线元为类光, (3-3-4a)

$u<1 \Leftrightarrow \mathrm{d}s^2<0 \Leftrightarrow$ 线元为类时. (3-3-4b)

利用上两式可把狭义相对论的两个基本"信条"用4维语言重新表述. 这两个信条的3维表述是大家熟知的两句话:

(A) 光子相对于任何惯性系的速率$u=1$(此即光速不变原理的核心内容);

(B) 质点相对于任何惯性系的速率$u<1$(此即"质点必须亚光速").

现在,借助于等价关系式(3-3-4)又可以把两个信条用4维语言重新表述如下:

(a) 光子的世界线是(闵氏时空的)类光曲线;

(b) 质点的世界线是(闵氏时空的)类时曲线.

由式(3-3-4)可知4维表述(a)、(b)等价于3维表述(A)、(B). 然而,3维表述总要借助于坐标系,而且还涉及粒子速率$u$的定义,不但不如4维表述简练自足,而且有时还会招致误解. 特别是,人们往往把3维表述(A)、(B)简单地记忆为

(A′) 光子的速率$u=1$;

(B′) 质点的速率$u<1$,

(或者更简单地记忆为"相对论不许超光速"),则更是容易引起误解和不必要的困惑. 关键在于,"速率"一词可以有各种(无限多种)不同定义,其中有些在物理上还很合理,很有资格被称为速率,但只要与质点相对于惯性系的速率定义式(3-3-2)不等价,这样的"速率"超过光速$c$就未必违背两个信条,就未必与4维表述(a)、(b)相矛盾("超光速"质点的世界线仍然可以是类时曲线),因而是完全允许的,不在被禁止之列. 然而,如果只记住"相对论不许超光速",就会误以为连这种"超光速"也有悖于相对论,也必须被禁止. 这种误解的例子很多,下面仅举三例.

**例1** 设$\{t,x,y,z\}$是惯性坐标系,用下式定义新坐标系$\{T,X,Y,Z\}$:

$$T\equiv t/2, X\equiv x, Y\equiv y, Z\equiv z, \quad (3-3-5)$$

则

$$U \equiv \frac{\sqrt{\mathrm{d}X^2 + \mathrm{d}Y^2 + \mathrm{d}Z^2}}{\mathrm{d}T} \quad (3-3-6)$$

自然就是质点在新坐标系中的速率. 由上式易得

$$U = \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}}{\mathrm{d}t/2} = 2\,\frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}}{\mathrm{d}t} = 2u.$$ [末步用到式(3-3-2)]

设$u=2/3$(即$2c/3$),便有$U=4/3>1$,即质点超光速.

**注6** 本例是一位美籍华人在北京做报告时对狭义相对论提出的一个质疑,本书第一作者当时在听众席.

**述评** 本例的$U>1$的确违背(B′),但并不违背准确提法(B),因为(B)要求$u$是质点相对于惯性系的速率,而新系$\{T,X,Y,Z\}$不是惯性系. 如果听完例1后跟着去大惊小怪,那完全是庸人自扰.

**例2** 设$\mathrm{K}\equiv\{t,x,y,z\}$是惯性坐标系,质点甲、乙沿$x$轴相背而行,如图3-14.

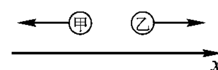


图3-14 例2用图

以 $x_甲$ 和 $x_乙$ 代表甲、乙的 $x$ 坐标，则 $R \equiv x_甲 - x_乙$ 是两者的距离. 有人喜欢用下式定义“甲乙之间的、由K系测得的相对速率”$u$：

$$u \equiv \frac{dR}{dt}, \qquad (3-3-7)$$

于是
$$u = \frac{dx_甲}{dt} - \frac{dx_乙}{dt}.$$

而 $dx_甲/dt$ 和 $dx_乙/dt$ 分别是甲和乙相对于K系的速率（记作 $u_甲$ 和 $u_乙$），故

$$u = u_甲 - u_乙.$$

只要取 $u_甲 = -u_乙 = 2/3$（即 $2c/3$），便有 $u = 4/3 > 1$，即超光速.

述评　由式（3-3-7）定义的 $u$ 并非哪个质点相对于哪个惯性系的速率，它大于光速 $c$ 并不违背信条（B）.

事实上，例1的 $u = 2/3$ 和例2的 $u_甲 = -u_乙 = 2/3$ 都不会改变两例所涉及的质点的世界线是类时曲线这一事实，根本不违背基本信条的4维表述（b），什么问题也没有.

例3　本例是宇宙论中经常被问及的一个有趣而且实际的问题，详见选读3-2.

［选读3-2］

宇宙是个“无所不包”的最大时空. 由于存在大量物质，这个时空是弯曲的，不存在什么惯性系. 不过，宇宙存在一个特殊的、各向同性的参考系，称为宇宙静系，其中的时间坐标 $t$ 称为宇宙时，它的每一同时面 $\Sigma_t$ 代表宇宙在时刻 $t$ 的全空间（也就是3维语言中的宇宙）. 在宇宙这个浩瀚的“大海”中，一个星系（例如我们的银河系）就如同“沧海之一粟”，可以被处理为宇宙时空中的一条世界线，它与每一同时面 $\Sigma_t$ 的交点就代表“$t$ 时刻的该星系”. 观测表明宇宙自创生开始至今一直在膨胀之中，表现为每一星系都觉得其他星系不断离自己退行而去. 作为比喻，考虑一个布满蚂蚁的气球. 当气球膨胀时，每一蚂蚁都看到其他蚂蚁在退行. 没有一个蚂蚁是特殊的. 同气球膨胀一样，宇宙的膨胀也没有中心. 任意两个星系的距离 $D$ 都是宇宙时 $t$ 的函数，可记作 $D(t)$，两星系之间的退行速率 $u$ 自然定义为 $D(t)$ 的时间导数：

$$u \equiv dD(t)/dt. \qquad (3-3-8)$$

宇宙论有一个哈勃定律，断言当今任意两个星系之间的退行速率 $u$ 与它们的距离 $D$ 成正比：

$$u = HD, \qquad (3-39)$$

其中 $H$ 是比例常数（哈勃常数）. 由上式可知，当 $D$ 足够大时 $u$ 可以大于光速. 许多人对此感到疑惑：这是否违背相对论的基本信条？答案是并不违背. 关键在于，虽然用式（3-3-8）给退行速率下定义非常合理，但它并不等价于式（3-3-2）的速率定义①，这样的 $u$ 大于光速未必违背相对论. 判断是否违背相对论的最佳办法是用基本信条的4维表述（b），也就是看看每个星系的世界线是否为类时曲线. 事实上，用4维语言讨论宇宙论时自始至终都默认每一星系的世界线是类时线［详见文献［2］第10章］，因此由式（3-3-8）定义的 $u$ 超过光速并不带来任何问题. 读者由此应该再次悟出（我们提倡一个“悟”字）4维语言的优越性. 试想：只记住“相对论不许超光速”而不知道对速率的定义有所要求就容易上当，而4维表述（b）（即“质点的世界线是类时线”）则简练自足，毫无误导之虞. 惟一缺点是不懂世界线和类时线的读者无从理解，如读天书. 不过，只要按照本书第2、3章的讲法对有关概念很快就能学会（就像用傻瓜照相机前稍微学一学简单用法），又何乐而不为呢？

［选读3-2完］

## §3.4　固有时与坐标时的区别和联系

惯性坐标系 $\{t,x,y,z\}$ 中的坐标 $t$ 也称为惯性坐标时，简称坐标时，与固有时 $\tau$ 既有区别又有联系. 坐标时与固有时有如下两点重要区别：

（1）固有时只对世界线上的点而言，脱离世界线就没有固有时可言. 如果两条不同的世界线 $L_1$ 和 $L_2$ 交于 $p$ 点，则 $p$ 点作为 $L_1$ 的一点的固有时可以不同于它作为 $L_2$ 的一点的固有时. 因此，“固有时”前面应该加一个定语，即明确说成“某世界线的固有时”. 当然，每次都加定语会过于啰嗦，但至少要在心中明确，做到心照不宣.（遗憾的是，有太多的人在谈及固有时的时候心中对此定语若明若暗. 你如果问他“谁的固有时？”他可能答不出来.）反之，坐标时与世界线无关，对任一时空点 $p$ 的都可谈及它的惯性坐标时.

（2）同一时空点 $p$ 在不同惯性坐标系中可以有不同的惯性坐标时. 因此，“坐标时”前面应该加一个定语（至少做到心照不宣），即明确说成“某某惯性坐标系的坐标时”. 而固有时则与坐标系毫无关系. 应该防止另一极端，那就是乱加定语，例如，如果

① 事实上也无从等价，因为式（3-3-2）涉及惯性坐标 $t,x,y,z$，而宇宙（作为弯曲时空）并不存在惯性坐标系.

说“$p$ 点在某坐标系的固有时”或者“$p$ 点作为某世界线的一点的坐标时”，都会贻笑大方.

如果 $p$ 点在某条世界线 L 上，当然可以谈及它作为 L 线的一点的固有时 $\tau$. 如果又选定了一个惯性坐标系$\{t,x,y,z\}$，当然也可谈及 $p$ 点在这个坐标系的坐标时 $t$. 我们想找出 $\tau$ 与 $t$ 的关系. 设 dL 是 L 的一个元段，起点为 $p$（仍见图 3－13）. 注意到 L 是类时曲线，由式（3－2－1）可知元段 dL 的固有时间

$$\mathrm{d}\tau=\sqrt{-\mathrm{d}s^2} \qquad (3-4-1)$$

故

$$\mathrm{d}\tau^2=-\mathrm{d}s^2, \qquad (3-4-2)$$

设 $u$ 是以 L 为世界线的质点相对于所论坐标系的速率，则上式与式（3－3－3）结合便得

$$\mathrm{d}\tau^2=(1-u^2)\,\mathrm{d}t^2 \qquad (3-4-3).$$

再利用符号 $\gamma_u\equiv1/\sqrt{1-u^2}$ 就可把上式改写为

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=\gamma_u. \qquad (3-4-4)$$

上式就是惯性坐标时 $t$ 与固有时 $\tau$ 的微分关系式. 当 L 是所选惯性系内的一个惯性观者时，由式（3－3－2）可知其 $u=0$，故 $\gamma_u=1$，注意到 $\tau=0$ 时 $t=0$，对式（3－4－4）积分便得 $t=\tau$. 这是很自然的，因为，根据图 3－11 所涉及的一段，任一时空点 $p$（当时记作 $a$）的坐标时 $t_p$ 本来就定义为 $t_p\equiv\tau_p$，其中 $\tau_p$ 是该系过 $p$ 点的那条惯性观者世界线在 $p$ 点的固有时.

## §3.5 时空图中的坐标轴

前已讲过，画时空图前应选定基准坐标系，并把该系的 $x$ 轴和 $t$ 轴画成横平竖直. 仍以地面系$\{t,x,y,z\}$和火车系$\{t',x',y',z'\}$为例，假定两系有最简关联. 选定地面系为基准，则其 $x$ 轴和 $t$ 轴如图 3－15 所示. 我们希望再画出 $t'$ 轴和 $x'$ 轴. 由于 $t'$ 轴上有 $x'=y'=z'=0$，$t'$ 轴就是火车系的空间坐标原点 O′ 的世界线. O′ 点显然相对于地面沿 $x$ 正向匀速运动，故其世界线应是图中标有 $t'$ 的斜直线. 至于 $x'$ 轴，许多初学者会不假思索地画成图中的虚直线. 然而这是错的！理由如下. 既然已知 $t$，$x$ 轴而待求 $t'$，$x'$ 轴，应该从两系坐标之间的关系出发，这关系由洛伦兹变换

图 3－15 初学者易犯的错误

$$t'=\gamma(t-vx), \quad x'=\gamma(x-vt) \qquad (3-5-1)$$

给出. 先检查 $t'$ 轴. 既然 $t'$ 轴上各点有 $x'=0$，代入式（3－5－1）得 $x-vt=0$，即

$$t=\frac{1}{v}x+0, \qquad (3-5-2)$$

根据解析几何，在以 $x$ 和 $t$ 为横平竖直的坐标轴的情况下，上式所代表的曲线是一条过原点的直线（“过原点”是因为截距为零），而且斜率为 $v^{-1}$（$>1$）. 可见图 3－15 的 $t'$ 轴是正确的. 另一方面，$x'$ 轴上各点有 $t'=0$，代入式（3－5－1）得

$$t=vx,$$

可见 $x'$ 轴是过原点的直线，斜率为 $v$（$>0$）. 然而图 3－15 的“$x'$ 轴”的斜率却为负，所以必定是错的. 正确的 $x'$ 轴示于图 3－16 中. 由于 $t'$ 轴和 $x'$ 轴的斜率互为倒数，它们对称地分居于图中的点划线（光子世界线）的两侧. 常常有人提出这样的问题：$t$ 轴与 $x$ 轴是正交的，而 $t'$ 轴与 $x'$ 轴却不正交，这岂非意味着两个惯性系互不平权？其实这只是时空图的“欺骗”，是人们习惯于用欧氏几何想问题的结果. 对时空图应当用闵氏几何想问题. 根据闵氏几何，图 3－16 的 $t'$ 轴正交于 $x'$ 轴，就是说，两轴互相闵氏正交而欧氏非正交.（本书并未给出闵氏正交的定义，读者只能承认此结论.）反之，图 3－15 的 $t'$ 轴与“$x'$ 轴”却是欧氏正交而闵氏非正交的. 如果愿意，你也可以选$\{t',x'\}$系为基准，图 3－17 就是所得的时空图，它与图 3－16 貌似不同，实质等价.

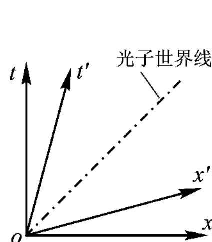



图 3－16 $t'$，$x'$ 轴的正确画法

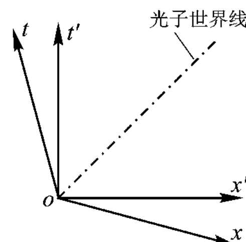



图 3－17 以$\{t',x'\}$系为基准的时空图，等价于图 3－16

时空图的“欺骗性”不但体现在正交性上，还体现在曲线长度的判断中. 设 $p=(t_p,x_p)$ 为任一时空点，$op$ 是连接 $o$ 与 $p$ 的直线段（见图 3－18），其线长按闵氏几何为

$$l_{op}=\sqrt{|-t_p^2+x_p^2|},$$

可见双曲线 $-t^2+x^2=\alpha$（常数）上各点与 $o$ 点所连直线等长，例如 $op$ 与 $oq$ 等长，尽管直观看来（即按欧氏几何看来）不等. 图 3－18 中的双曲线称为校准曲线，有助于迅速判断两段直线孰长孰短. 校准曲线既可以是类时的（当 $p$ 点在第一、三象限），也可以是类空的（当 $p$ 点在第二、四象限）.

图3－16表明不同惯性系有不同的同时面族,由此可以清楚地看出同时性的相对性.考虑图3－19的事件$p$和$q$.由于它们位于$\{t,x\}$系的两张不同的同时面上,所以该系认为事件$p$和$q$不同时.然而,$p$,$q$位于$\{t',x'\}$系的同一张同时面$\Sigma_{t'_p}$上,所以$\{t'x'\}$系认为它们是同时事件.

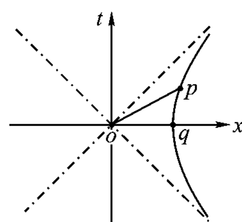
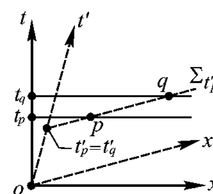



图3－18 双曲线是校准曲线




3－19 $p$,$q$对$\{t',x'\}$系是同时件,但对$\{t,x\}$系却不同时

(上接48页)

力,刚性愈大,物质愈不容易发生形变,结构也就愈稳定.超声波在溶液中是通过振动传播的,而团簇的刚性决定了溶液振动能力的大小,刚性愈小,分子结构愈不稳定,振动就愈剧烈,也就愈有利于声波在其中的传播.因此刚性小的链状团簇对于声波的传播要强于平面结构的团簇.

## 3 结语

由于氢键的存在使得乙醇水溶液的分子间发生缔合作用,但在较高和较低两个浓度区间内产生的团簇结构存在明显差异.当质量分数较低时,以乙醇分子间的自缔合为主,产生的是刚性较小、有利于声波传播的链状团簇,且随着质量分数的增大,链状团簇的数目增多,因此声速呈上升趋势.但质量分数较高时,以乙醇分子和水分子之间的异种分子缔合为主,产生的是刚性大、不利于声波传播的面状团簇,其数目随着质量分数的增大而增多,直接导致溶液中的声速呈下降趋势.至此,乙醇水溶液体系声速反常现象的微观机理得到了比较合理的解释.

## 参考文献:

[1] 吴斌,刘莹,韩彩琴,等.乙醇－水溶液中团簇分子的基元荧光光谱研究[J].光谱学与光谱分析,2010,5(5):1285-1289.

[2] 冯若.超声手册[M].南京大学出版社,1999:146-147.

[3] 刘澄宇.用超声光栅仪测量液体浓度[J].新余高专学报,2007,12(12):80-82.

[4] 刘小廷.大学物理实验[M].科学技术出版社,2009:234-239.

[5] 梅振林,隋成华.超声光栅测量声速的研究及仪器化实现[J].大学物理实验,2004,17(1):28-31.

[6] 陈晓莉,王培吉.用超声光栅测液体中声速的理论与实验研究[J].西南师范大学学报(自然科学版),2007,32(6):135-138.

[7] 金洪勋.超声光栅的形成机理[J].甘肃工业大学学报,1997,23(2):108-111.

[8] 刘艳玲,张振豹.浅析氢键及其对物质性质的影响[J].吕梁高等专科学校学报,2010,2(6):36-28.

[9] 刘文剑.氢键对物质性质的影响[J].高等函授学报(自然科学版),2002,4(8):23-25.

[10] Wang S H,Cann N M. Polarizable and flexible model for ethanol[J]. The Journal of Chemical Physics,2007,126:214502.

# Research on ethanol－aqueous solution's irregular acoustic nature

GUO Qi-kai,GUO Min-qiang,LI Chao,ZHANG Ya-ping,YAN Xiang-hong

(College of Science,University of Petroleum of China(East China),Qingdao,Shandong 266580,China)

**Abstract:** The sound velocity in the ethanol water has the typical features,that is,the relationship between the velocity and the concentration appears such trend which is rising first and declining then,obviously it has an extremum. This article makes explanations in a microscopic view,eventually gives the inference that in the low concentration and the high concentration ethanol－aqueous solution emerge respectively two different rigid clusters with chain structure and planar structure under the effect of hydrogen bond. Due to its different stability,they cause different impacts to the bulk modulus,which then lead to the different regularities of the sound velocity in different concentrations.

**Key words:** ethanol－water binary mixture; acoustical properties; bulk modulus; hydrogen bond; cluster

《从零学相对论》连载

# 《从零学相对论》连载⑥

梁灿彬[1]，曹周键[2]
(1. 北京师范大学 物理系，北京 100875; 2. 中科院 应用数学所，北京 100190)

## §3.6 时序和因果关系

以 $p_1$ 和 $p_2$ 分别代表某人的出生和死亡事件，设它们在某惯性系 $K\equiv\{t,x,y,z\}$ 的时间坐标为 $t_1$ 和 $t_2$，则显然有 $\Delta t\equiv t_2-t_1>0$(出生先于死亡). 设 $p_1$ 和 $p_2$ 在另一惯性系 $K'=\{t',x',y'z'\}$ 的时间坐标为 $t_1'$ 和 $t_2'$. 如果牛顿力学适用，由时间的绝对性可知 $t_1'=t_1$，$t_2'=t_2$，故 $\Delta t'\equiv t_2'-t_1'=\Delta t>0$，仍是出生先于死亡. 但是，在狭义相对论中时间是相对的，$\Delta t'$ 与 $\Delta t$ 一般不等. 如果竟然出现 $\Delta t'<0$ 的情况，岂不是 $K'$ 系认为死亡先于出生? 这种违反因果律的结论是任何人都不能接受的，因此很有必要把这个问题弄个水落石出.

先讨论2维闵氏时空这一简单情况，然后再推广到4维闵氏时空. 设 $p_1$ 和 $p_2$ 是任意两个事件，它们在惯性系 K 和 $K'$ 的坐标分别为

$$p_1=(t_1,x_1)=(t_1',x_1'),\quad p_2=(t_2,x_2)=(t_2',x_2'),\tag{3-6-1}$$

令 $\Delta t\equiv t_2-t_1$，$\Delta x\equiv x_2-x_1$. 对2维时空，两惯性系 K 和 $K'$ 之间的坐标变换只能是如下最简单的洛伦兹变换:

$$t'=\gamma(t-vx),\quad x'=\gamma(x-vt),\tag{3-6-2}$$

过去一直约定 $v>0$，现在放宽为 $v$ 可正可负(只须 $|v|<1$)，$v<0$ 代表 $K'$ 系沿 K 系 $x$ 轴的负向运动. 由式(3-6-2)得

$$\Delta t'=\gamma(\Delta t-v\Delta x).\tag{3-6-3}$$

不失一般性，设 $\Delta t>0$，这意味着 K 系认为事件 $p_1$ 先于 $p_2$ 发生. 如果 $\Delta t'>0$，就说洛伦兹变换(3-6-2)是保时序的; 如果 $\Delta t'<0$，就说变换(3-6-2)是改时序的.

时序能否保持，关键在于两事件的时空间隔. 事件 $p_1$ 和 $p_2$ 的时空间隔 $I_{12}$ 定义为

$$I_{12}\equiv-\Delta t^2+\Delta x^2.$$

(易证它在洛伦兹变换下形式不变) (3-6-4)

间隔分为三类: $I_{12}>0$ 的间隔叫类空的; $I_{12}<0$ 的间隔叫类时的; $I_{12}=0$ 的间隔叫类光的. 间隔的类空、类时和类光性都是绝对的，不随惯性系而变. 下面是本节的关键性定理.

**定理3-1**

(A) 若两事件的间隔为类时或类光($I_{12}\leqslant0$)，则任何洛伦兹变换都保时序;

(B) 若两事件的间隔为类空($I_{12}>0$)，则必有改时序的洛伦兹变换.

**证明** 在式(3-6-3)涉及的各量 $\Delta t'$，$\Delta t$，$\Delta x$，$v$ 中，除约定 $\Delta t>0$ 外，其他都可取正、负或零值.

(A) 由式(3-6-4)可知，$I_{12}\leqslant0$ 保证

$$|\Delta x|\leqslant\Delta t.\tag{3-6-5}$$

注意到 $|v|<1$，又有 $|\Delta x|>|v||\Delta x|\geqslant v\Delta x$，与式(3-6-5)结合得 $\Delta t>v\Delta x$，代入式(3-6-3)便得 $\Delta t'>0$(保时序). 可见，$I_{12}\leqslant0$ 时任何洛伦兹变换都保时序.

(B) 由式(3-6-4)可知

$$I_{12}>0\quad\Leftrightarrow\quad\Delta t<|\Delta x|.\tag{3-6-9}$$

若 $\Delta x>0$，则由上式得 $\Delta t/\Delta x<1$，只要取 $v>\Delta t/\Delta x$，便有 $v\Delta x/\Delta t>1$，由式(3-6-3)便得 $\Delta t'<0$，这个洛伦兹变换便改时序. 图3-20(a)是这种变换的时空图，由图可清晰地看到 $\Delta t>0$ 而 $\Delta t'<0$.(不失一般性，图中以 $p_1$ 作为惯性系$\{t,x\}$的坐标原点.)

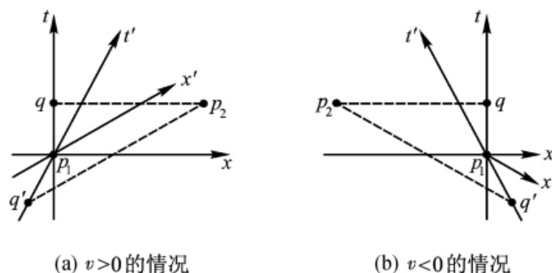



图3-20 改时序的洛伦兹变换. 对$\{t,x\}$系，$p_2$ 与 $q$ 同时，晚于 $p_1$; 对$\{t',x'\}$系，$p_2$ 与 $q'$ 同时，早于 $p_1$

若 $\Delta x<0$，则 $\Delta t/\Delta x<0$. 另一方面，由式(3-6-9)知 $I_{12}>0$ 保证 $\Delta t/|\Delta x|<1$. 只要取 $v<0$ 而且 $|$

$v| > \Delta t/|\Delta x|$，则 $v\Delta x/\Delta t > 1$，由式(3－6－3)便得 $\Delta t' < 0$，这个洛伦兹变换便改时序. 图 3－20(b)是这种变换的时空图，由图可见 $\Delta t > 0$ 而 $\Delta t' < 0$.

[证毕]

下面揭示定理 3－1 的物理意义. 以 $p_1$ 为原点建惯性系 $\{t,x\}$(图 3－21). 当 $I_{12} < 0$ 时 $\Delta t/|\Delta x| > 1$，由图 3－21 可知直线段 $p_1p_2$ 是类时线段(因而 $p_2$ 位于 $p_1$ 的未来光锥面以内)，我们说 $p_2$ 与 $p_1$ 有类时联系. 既然如此，原则上就可以认为 $p_1$ 和 $p_2$ 分别是某个信号的发出和接收事件. 例如，$p_1$ 代表某人的出生，$p_2$ 代表他的死亡；又如，$p_1$ 代表子弹从手枪射出，$p_2$ 代表子弹中靶. 总之，有类时联系的两个事件 $p_1$ 和 $p_2$(其 $I_{12} < 0$)原则上可以有因果联系，如果竟然存在一个洛伦兹变换使得新系认为 $p_2$ 先于 $p_1$ 发生(改变时序)，就会因果倒置，这是按任何标准衡量都不允许的. 定理 3－1(A)的重要性就是保证这种改时序的洛伦兹变换不会存在. 此外，定理 3－1(A)的 $I_{12} \leqslant 0$ 还包含擦边情况 $I_{12} = 0$，这时 $p_2$ 位于 $p_1$ 的未来光锥面上，两者也可有因果联系(例如 $p_1$ 和 $p_2$ 分别代表光子枪的发射和中靶事件)，定理 3－1(A)也保证不存在改时序的洛伦兹变换.

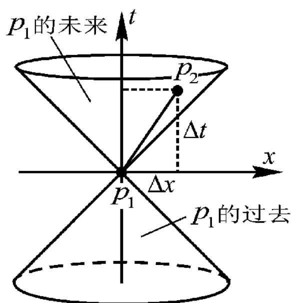



图 3－21　事件 $p_1$，$p_2$ 有类时联系

反之，定理 3－1(B)则表明，只要 $p_1$ 和 $p_2$ 有 $I_{12} > 0$，就总可找到改时序的洛伦兹变换. 假若这两个事件竟然也有因果联系，在新的惯性系中岂非会因果倒置？幸好，任何两个满足 $I_{12} > 0$ 的事件一定不可能有因果联系，证明如下.

设事件 $p_1$ 和 $p_2$ 满足 $I_{12} > 0$，则 $(\Delta t)^2 < (\Delta x)^2$. 不失一般性，可设 $x_2 > x_1$，即 $\Delta x > 0$，因而 $\Delta t < \Delta x$(如图 3－22). 以 L 代表连接 $p_1$ 和 $p_2$ 的任一曲线，则线上任一点的 $t$ 便是 $x$ 的函数，记作 $f(x)$，定义域为 $[x_1,x_2]$. 根据微积分学的中值定理，在 $x_1$ 和 $x_2$ 之间必定存在一个 $\bar{x}$，满足

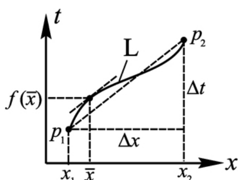



图 3－22　用中值定理证明曲线为类空

$$\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\bar{x}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

由 $I_{12} > 0$ 知 $\Delta t/\Delta x < 1$，故 $[\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x]|_{x=\bar{x}} < 1$，表明曲线 L 在点 $f(\bar{x})$ 的斜率小于 1，因而 L 不是类时或类光曲线. 可见，假若竟有一个信号从事件 $p_1$ 传到 $p_2$，在传播过程中至少有某些时候会超光速，而这样的信号在相对论中不存在. 这就证明了 $p_1$ 和 $p_2$ 不存在任何因果联系. 虽然确有洛伦兹变换改变它们的时序，但这种改变无关紧要，不会导致任何因果疑难.

刚才只就 2 维闵氏时空做了讨论，现在将结论推广至 4 维闵氏时空. 设事件 $p_1$ 和 $p_2$ 在某惯性系 $K \equiv \{t,x,y,z\}$ 的坐标为

$$p_1 = (t_1,x_1,y_1,z_1), \quad p_2 = (t_2,x_2,y_2,z_2),$$

它们的时空间隔 $I_{12}$ 定义为

$$I_{12} \equiv -\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2, \quad (3-6-10)$$

其中 $\Delta t \equiv t_2 - t_1$，$\Delta x \equiv x_2 - x_1$，$\Delta y \equiv y_2 - y_1$，$\Delta z \equiv z_2 - z_1$. 间隔类空、类时和类光性的定义与 2 维时空相同. 由 2 维的讨论可知，现在的要害问题是要证明如下定理.

**定理 3－2**　若对 $p_1$ 和 $p_2$ 有 $I_{12} \leqslant 0$，而且在某惯性坐标系 $K \equiv \{t,x,y,z\}$ 中 $\Delta t > 0$，则对任何惯性坐标系都有 $\Delta t' > 0$(这意味着有类时或类光联系的两事件在任何惯性系中都有相同时序，因而不会导致因果疑难).

**注 7**　表面看来这一定理的证明与定理 3－1(A)的证明很像，只须把 2 维洛伦兹变换(3－6－2)改成 4 维洛伦兹变换

$$t' = \gamma(t - vx), \quad x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (3-6-11)$$

然而问题并非如此简单. 关键在于上式只是两个有最简关联(见图 1－1 及其所在段)的惯性系之间的坐标变换，而我们要证明的是在任何惯性坐标系中都有 $\Delta t' > 0$，其中许多系与 K 系之间都不是最简关联. 由于式(3－6－11)在狭义相对论中被频繁使用，久而久之，就会误以为这是一个“包打天下”的变换而忘记有时还会遇到更复杂的洛伦兹变换. 现在，为了证明定理 3－2，恰恰必须涉及这种复杂变换. 这是 4 维闵氏时空中任意两个惯性系 K 和 K′之间的坐标变换，两系之间的关系比最简关联要复杂，由以下三点表征：①两系空间坐标原点在 $t' = t = 0$ 时相遇；② $\{x',y',z'\}$ 相对于 $\{x,y,z\}$ 系以任意速度 $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3$ 作匀速平动，其中 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 是沿 K 系 $x,y,z$ 轴正向的单位矢；③两系空间坐标轴

**对应同向. 这两个系的坐标变换由如下的矩阵等式表出(证明见文献[3]小节G.9.1):**

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v_1 & -\gamma v_2 & -\gamma v_3 \\ -\gamma v_1 & 1+\frac{(\gamma-1)v_1^2}{v^2} & \frac{(\gamma-1)v_1v_2}{v^2} & \frac{(\gamma-1)v_1v_3}{v^2} \\ -\gamma v_2 & \frac{(\gamma-1)v_2v_1}{v^2} & 1+\frac{(\gamma-1)v_2^2}{v^2} & \frac{(\gamma-1)v_2v_3}{v^2} \\ -\gamma v_3 & \frac{(\gamma-1)v_3v_1}{v^2} & \frac{(\gamma-1)v_3v_2}{v^2} & 1+\frac{(\gamma-1)v_3^2}{v^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \tag{3-6-12}$$

**其中** $v \equiv \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} < 1$, $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-v^2}$. (3-6-13)

**式(3-6-12)称为最一般的洛伦兹变换. 为了证明定理3-2,必须且只须证明式(3-6-12)的变换不会导致$\Delta t$变号.**

**定理3-2的证明** 由式(3-6-12)得$t' = \gamma(t - v_1 x - v_2 y - v_3 z)$,故

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - v_1\Delta x - v_2\Delta y - v_3\Delta z). \tag{3-6-14}$$

**注意到$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3$是3维矢量,再定义3维矢量$\Delta\boldsymbol{X} \equiv \boldsymbol{e}_1\Delta x + \boldsymbol{e}_2\Delta y + \boldsymbol{e}_3\Delta z$,就可把式(3-6-14)表为**

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{X}). \tag{3-6-14'}$$

**以$\alpha$代表矢量$\boldsymbol{v}$与$\Delta\boldsymbol{X}$的夹角,$|\boldsymbol{v}|$和$|\Delta\boldsymbol{X}|$代表两矢量的长度[其中$|\boldsymbol{v}|$即式(3-6-13)的$v$,故$0<v<1$],则**

$$\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{X} = |\boldsymbol{v}||\Delta\boldsymbol{X}|\cos\alpha \leqslant |\boldsymbol{v}||\Delta\boldsymbol{X}| < |\Delta\boldsymbol{X}|. \tag{3-6-16}$$

**由式(3-6-10)又知$I_{12} \leqslant 0$保证$|\Delta\boldsymbol{X}| \leqslant \Delta t$,代入式(3-6-16)给出$\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{X} < \Delta t$,再代入式(3-6-14')便知$\Delta t' > 0$.** **[证毕]**

**[选读3-3]**

正文把式(3-6-12)称为"最一般的洛伦兹变换"其实不够准确,本选读对此加以准确化. 感到不好理解的读者不读也罢.

洛伦兹变换包含两种类型,仍以地面系和火车系为例说明. 设$\mathrm{K} \equiv \{t,x,y,z\}$是地面参考系内的一个惯性坐标系,让3个空间坐标轴(统一地)做一个空间转动就得到一个新坐标系$\tilde{\mathrm{K}} \equiv \{t,\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}\}$,同一事件$p$既可表为$(t,x,y,z)$又可表为$\{t,\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}\}$. 从K系到$\tilde{\mathrm{K}}$系的变换是地面参考系内的坐标系变换(所以时间坐标$t$不变),称为**转动**,是洛伦兹变换的第一种类型. 我们熟悉的洛伦兹变换(3-6-11)则属于洛伦兹变换的第二种类型,称为**伪转动**,是从地面参考系内的惯性坐标系$\mathrm{K} \equiv \{t,x,y,z\}$到火车参考系内的惯性坐标系$\mathrm{K}' \equiv \{t',x',y',z'\}$的变换. 由于约定K和K′系有最简关联,所以式(3-6-11)最为简单,因而又称为**最简单的伪转动**.

如果让K′系的3个空间坐标轴(统一地)做一个空间转动,而且这个转动与从K系到$\tilde{\mathrm{K}}$系的转动一样,所得到的新系$\tilde{\mathrm{K}}' \equiv \{t',\tilde{x}',\tilde{y}',\tilde{z}'\}$与$\tilde{\mathrm{K}}$系的关系就比最简关联要复杂,两系的坐标变换就是式(3-6-12),称为**最一般的伪转动**,其特点就是式(3-6-12)前面一段的①、②、③点. 不应将它称为最一般的洛伦兹变换,因为转动也是洛伦兹变换. 转动与伪转动的关键区别是:转动不改变参考系,伪转动则必然涉及参考系的变换. 最后给出洛伦兹变换的明确定义:两个惯性坐标系之间的、保证空间坐标原点在$t'=t=0$时重合的坐标变换称为**洛伦兹变换**,它既可以是转动,又可以是伪转动,还可以是两者的叠加(相继作用). 所有洛伦兹变换的集合构成群(洛伦兹群). 详细讨论可在文献[3]的§G.9中找到.

[**选读3-3完**]

## §3.7 何谓几何语言?何以要用几何语言?

**在变化纷繁的研究对象中抓住不变的东西是相对论学家从数学家借用过来的高招. 要学好相对论,最关键的(偏偏又是最容易忽视的)一点就是要善于区分绝对的和相对的对象(包括量、概念及其他),并且要紧抓不放. 如果一个对象与某种人为选择的因素有关,该对象就称为相对的(relative),否则称为绝对的(absolute). 下面举例说明.**

**例1** **事件本身是绝对的,但事件的坐标是相对的,因为对于同一事件,不同坐标系会给出不同的时空坐标,即$p=(t,x,y,z)=(t',x',y',z')$,但通常$t' \neq t$,$x' \neq x$,等等.**

**例2** **时空,作为所有事件的集合,是绝对的,但"每一时刻的全空间"(同时面)的概念则是相对的,因为不同惯性系有不同的同时面族.**

**一个惯性系有一个同时面族(不妨比喻为一副扑克牌,见图3-6),每张同时面代表一个时刻的全空间,从时空图底部开始逐渐向上看,就会看到运动的全过程[仍可用图3-4(b)为例],这个"逐渐向上看"就代表时间的流逝,所以说时空被这个惯性系做了"3+1分解". 如果改用另一惯性系,其同时面族就是"另一副扑克牌"(参见图3-19),所以说这是对同一时空的另一种"3+1分解". 可见,时空是绝对的,但分解而得的空间和时间都是相对的.**

**例3** **给定几何(例如给定闵氏几何)后,曲线元段dL的线元$\mathrm{d}s^2$本身是绝对的,但线元表达式却是相对的,例如闵氏线元在惯性坐标系$\{t,x,y,z\}$的表达式为**

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2, \tag{3-7-1}$$

**而在4维球坐标系$\{t,r,\theta,\varphi\}$的表达式则为**

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2). \tag{3-7-2}$$

如果愿意(有时也很必要)，你还可以选择更为奇特的坐标系使闵氏线元 $\mathrm{d}s^2$ 的表达式复杂到无人可以一眼看穿的程度. 例如，下式虽然不算太复杂:

$$\mathrm{d}s^2 = -[1+g(t)x]^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2,$$

其中 $g(t)$ 是 $t$ 的任意函数，(3-7-3)

你能看出它其实是闵氏线元吗? 为了给出证明，只须找到一个能将上式变为式(3-7-1)的坐标变换. 以 $T,X,Y,Z$ 代表新坐标，则这一坐标变换是

$$T = \int [\mathrm{ch}\, G(t)]\,\mathrm{d}t + x\mathrm{sh}\, G(t),$$

$$X = \int [\mathrm{sh}\, G(t)]\,\mathrm{d}t + x\mathrm{ch}\, G(t),$$

$$Y = y,\quad Z = z,\quad 其中\ G(t) \equiv \int g(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (3-7-4)$$

作为习题，请读者自行验证式(3-7-3)的线元在坐标系$\{T,X,Y,Z\}$的确取如下形式:

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}T^2 + \mathrm{d}X^2 + \mathrm{d}Y^2 + \mathrm{d}Z^2.$$

上式说明$\{T,X,Y,Z\}$是惯性坐标系，而式(3-7-3)无非是闵氏线元在非惯性坐标系$\{t,x,y,z\}$的表达式. 一个常见误解是一见式(3-7-3)就以为是弯曲几何. 产生误解的根源就是不会透过坐标表象看清几何实质，好比抓住"鸡毛"，丢掉"令箭". 正是"不识几何真面目，只缘心在坐标中."所以，我们应该提高警惕，在见到复杂的线元表达式时切莫"只重衣冠不认人"，其实它可能只是同一个"人"(闵氏线元)穿了一身奇特的"衣服".

例 4　世界线，作为一连串事件的集合，是绝对的. 但画在时空图中的"世界线"却是相对的，因为其形状还取决于画图时所选择的基准坐标系. 应该学会把绝对的世界线同画在时空图中的"世界线"区分开. 仍以图 3-5 的火车头 A′为例. A′的"世界线"在以地面系为基准的时空图中是斜直线; 但在以火车系为基准的时空图中则是竖直线. 作为有益的练习，读者不妨把图 3-5(b)改画成以火车系为基准的时空图. 进一步说，如果故意选一个不是惯性系的、更为复杂的坐标系为基准画时空图，则 A′的"世界线"甚至可以是一条奇形怪状的曲线. 下面的比喻有助于理解: 录制电视剧时，对同一场戏通常要用几台摄像机从不同角度拍摄. 不妨说那场戏是绝对的(只有这么一场戏)，但录像带记录的画面则是相对的(依赖于拍摄角度).

以上例子说明，同一个绝对对象在不同参考系(坐标系)中会成为不同的相对对象. 因此，在注意这些相对对象的区别的同时，还应特别注意它们所描述的是同一绝对对象("万变不离其宗"). 如果只看见对象在坐标变换时变来变去，却抓不住万变所不离的"宗"，就有可能"找不着北"，自乱阵脚，造成各种迷惑和误解(例子不胜枚举).

上述讨论说明坐标语言有时会遮盖研究对象的绝对性质，在平面几何学中也有这样的例子. 设 $x,y$ 是 2 维欧氏空间的直角坐标，则方程

$$x^2 + y^2 = R^2(常数)$$

代表圆. 但通过坐标变换可把上式变得使你认不出它是圆. 要突出圆的绝对性质可改用不借助坐标系的语言: 圆是与某定点距离相等的动点的轨迹. 不妨把这种语言称为(纯)几何语言.

相对论中的 3 维看法总是借助于某参考系(或坐标系)看 4 维时空的产物(是借某系对时空做 3+1 分解的结果)，天生就是相对的，所以直接涉及绝对对象的语言只能是 4 维语言(时空语言)，通常就称之为相对论的几何语言. 用时空图讨论问题是几何语言的重要方面，此外，几何语言也包括用 4 维矢量和张量讨论问题. 限于篇幅，本书不拟涉及 4 维矢量和张量，书中的几何语言主要体现在: ①从观念上彻底分清绝对和相对的事物; ②尽量用时空图讨论问题. 我们虽然强调几何语言的诸多优越性，但毫不否认坐标语言具有便于表达和计算等等重要好处.

相对论几何语言的创始人是大数学家闵可夫斯基(Minkowski)，他曾是爱因斯坦在苏黎世理工学院就读时的数学老师. 由于爱因斯坦经常逃课(以便有更多时间独自学习和思考)，他对爱因斯坦的总体印象不佳，甚至曾称他为"懒骨头". 但后来爱因斯坦的相对论引起了闵可夫斯基的强烈兴趣，他敏锐地觉察到，只有把空间和时间有机结合而成的 4 维时空[他称之为世界(world)]才是有实质性意义的东西，并且用 4 维几何语言对相对论做了十分优雅的改写. 他在 1908 年的一次"通俗讲话"中介绍了这一革命性的思想[①]. 这一讲话其实非常不通俗，因为它基本上是此前他的一篇专业性很强的文章[②]的重述.

(下转第 65 页)

① 第 28 届德国自然科学家和医生大会于 1908 年在科隆举行，闵可夫斯基在会上发表了这一讲话.

② 该文被收入一本论文集中，其英译本出版于 1923 年，作者为 Lorentz，Einstein，Minkowski and Weyl，后来又被译成汉语并出版，书名为《相对论原理》，A. 爱因斯坦等著，赵志田、刘一贯译，孟昭英校，科学出版社出版(1980).

(上接 61 页)

该文一开头就说:“现在我要向你们提出的时空观是在实验物理学的土壤上产生的,其力量就在这里. 这些观点是根本性的. 从现在起,孤立的空间和孤立的时间注定要消失成为影子,只有两者的统一才能保持独立的存在. ”可惜当时的爱因斯坦对这一重大贡献不感兴趣,他还语带嘲讽地说过:“重要的是内容而不是数学,数学对什么都能证明. ”(见文献[4]P. 76.)他甚至把闵可夫斯基的发现称为“多余的学问(superfluous erudition)”(见文献[6]P. 220). 爱因斯坦后来还说过,由于数学家使用如此复杂的语言描述相对论,“我就再也不懂相对论了”(见文献[5]P. 159). 然而,此一时彼一时,几年后的爱因斯坦终于认识到闵可夫斯基贡献的巨大意义,并且承认,如果没有 4 维语言,“相对论仍将处于襁褓之中”(见文献[6]P. 220). 特别是,为了把引力也纳入相对论中(为了建立广义相对论),爱因斯坦从 1912 年起就认识到闵可夫斯基的 4 维绝对时空是极其必要、无法替代的(广义相对论的背景时空是弯曲时空,详见第 6 讲). 他在 1916 年发表的关于广义相对论的文章中写道:“闵可夫斯基为狭义相对论给出的 4 维表述大大促进了相对论的推广,他是清晰地认识到空间和时间坐标等价性的第一位数学家;这种 4 维表述使广义相对论的构建成为可能. ”遗憾的是,闵可夫斯基没能活着听到爱因斯坦对于自己的贡献的肯定,他英年早逝,45 岁(1909 年)时卒于阑尾炎.

## 参考文献:


[1] 爱因斯坦,等. 相对论原理(狭义相对论和广义相对论经典论文集)[M]. 赵志田,刘一贯,译. 北京:科学出版社,1980.
[2] 梁灿彬,周彬. 微分几何入门与广义相对论(上册)[M]. 北京:科学出版社,2006.
[3] 梁灿彬,周彬. 微分几何入门与广义相对论(中册)[M]. 北京:科学出版社,2009.
[4] Brian D. Einstein: A Life[M]. New York: John Wiley and Sons, 1996.
[5] Clark R. Einstein: The Life and Times[M]. New York: World Publishing, 1971.
[6] Cropper W H. Great Physicists[M]. New York: Oxford University Press, 2001.


(第三讲完)

《从零学相对论》连载

# 《从零学相对论》连载⑦

梁灿彬[1]，曹周键[2]

(1. 北京师范大学 物理系，北京 100875； 2. 中科院 应用数学所，北京 100190)

## 第 4 讲 趣味运动学效应

### §4.1 尺缩效应和车库佯谬

稍微接触过狭义相对论的人都听说过尺缩、钟慢等饶有兴味的效应. 当你进一步听到“双生子悖论”和“车库悖论”时，除了觉得更加有趣之外，还会平添许多疑惑和不解. 其实，只要思维清晰，利用洛伦兹变换就可把这些效应解释清楚. 不过，对于某些问题(特别是“双子悖论”)，在听完用洛伦兹变换的分析后往往仍感到若明若暗，甚至产生这样那样的误解. 反之，本书推荐的 4 维几何语言(也可称为时空语言)可以对这些效应给出让你叹为观止的清晰剖析. 这一方法至少有以下优点：① 简单易学性(前提是你基本掌握第 2、3 讲的内容)；② 深刻清澈性(透过时空图可以一眼看穿问题实质)；③ 误解免疫性(不但不易产生误解，还可澄清过去的诸多误解). 下面就用此法逐一剖析 4 个效应.

#### 4.1.1 尺缩效应

此效应可用一句话描述 “当尺子沿尺长方向相对于你运动时，你会测得它变短.”简言之就是“动尺缩短”甚至“尺缩”①. 但是“缩”字容易误导，有人据此猜测：由于运动，尺子可能会因为受到某种外力而收缩. 由下面的几何剖析就可看出这是严重的误解.

对熟悉 4 维语言的人来说，尺子本来就不是 1 维的，它是个 2 维对象(尺子的世界面). 这是个绝对的对象，与参考系无关. 既然是 2 维对象，“尺子有多长?”就是个意义不明的问题. 只有选定参考系后尺长才有意义. 设选定惯性系 K，就有一系列的同时面，任选一张，例如 $\Sigma_0$(即 $t=0$ 的同时面，见图 4-1)，则它代表 K 系认为的、在 $t=0$ 时刻的全空间，

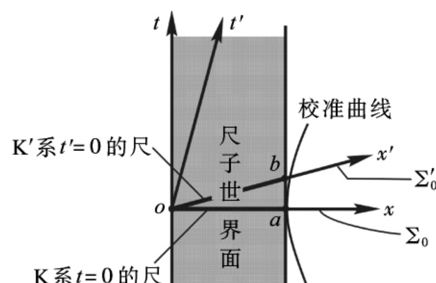



图 4-1 尺子世界面是绝对的. $oa$ 和 $ob$ 分别是 K 系和 K′系在 $t=0$ 和 $t'=0$ 时的 1 维尺

故 $\Sigma_0$ 与尺子世界面的相交线段 $oa$ 就代表 K 系认为的、$t=0$ 时刻的(1 维)尺子，于是线长 $l_{oa}$ 就是 K 系在该时刻测得的尺长(静尺长). 然而，由于同时性的相对性，K′系在 $t'=0$ 时刻的同时面 $\Sigma_0'$ 与 $\Sigma_0$ 不重合(仍见图 4-1)，它与尺子世界面的相交线段 $ob$ 不同于 $oa$，而 $ob$ 段代表 K′系认为的、$t'=0$ 时刻的尺子，所以 $l_{ob}$ 才是 K′系测得的尺长. 由于 K′系认为尺子在动，所以 $l_{ob}$ 是动尺长. $ob$ 和 $oa$ 本来就是两个不同的直线段，线长不同又何足大惊小怪? 但是，不懂几何语言的人总觉得“尺子明明只有一把”，既然同一把尺子有两种长度，想必是“动尺的内部机制起了变化，导致尺缩.”殊不知从 4 维角度看来尺子(世界面)根本就没有变化，更没有收缩可言. 尺长不同的本质原因是：虽然尺子只有一把(是绝对的)，但不同惯性系有不同的同时面导致不同惯性系测到不同的 1 维尺子(1 维尺是相对的)，而不同的 1 维尺有不同尺长当然不足为怪. 尺缩效应不过类似于“盲人摸象”而已.

既然 $l_{oa}$ 和 $l_{ob}$ 分别代表静、动尺长，所余问题无非是比较 $l_{oa}$ 和 $l_{ob}$. 由于直角三角形斜边最长，似乎

① 又称为洛伦兹－斐兹杰惹收缩. 迈克耳孙和莫雷的 1887 年实验的目的是证明以太存在性，结果却是迹象全无. 为了说明这一“零结果”与以太的存在性并无矛盾，斐兹杰惹(Fitzgerald)于 1892 年大胆提出一个假设(后来又被洛伦兹强化)：所有物体在相对于以太系运动的方向上的长度都要缩短，缩短因子为 $\sqrt{1-v^2/c^2}$. 但这一假设后来得不到实验支持，只有用爱因斯坦的相对论方可正确解释尺缩效应.

$l_{ob} > l_{oa}$，岂非动尺较长？然而这也是时空图的“欺骗”（“斜边最长”只是欧氏几何的结论）. 过 $a$ 作校准曲线（见§3.5）便知 $l_{ob} < l_{oa}$，可见动尺较短. 欲求两者之间的定量关系，只须计算两段线长. 线长是绝对量，计算结果同所选坐标系无关. 为便于比较，我们用同一坐标系（K 系）计算. 注意到 $o$ 点在该系的坐标为（0，0，0，0），由线长公式（2－2－1）及闵氏线元在该系的表达式（2－1－8）得

$$l_{oa} = \int_o^a \sqrt{ds^2} = \int_o^a \sqrt{dx^2 - dt^2} = \int_o^a \sqrt{dx^2 - 0} = \int_o^a dx = x_a, \quad (4-1-1)$$

$$l_{ob} = \int_o^b \sqrt{ds^2} = \int_o^b \sqrt{dx^2 - dt^2}.$$

由式（3－5－3）又知 $x'$ 轴满足 $t = vx$，故

$$l_{ob} = \int_o^b \sqrt{dx^2 - (v dt)^2} = \sqrt{1 - v^2}\int_o^b dx = \gamma^{-1} x_b = \gamma^{-1} x_a. \quad (4-1-2)$$

与式（4－1－1）对比便得动、静尺长的定量关系

$$l_{ob} = \gamma^{-1} l_{oa}, \quad \text{即} \quad \text{动尺长} = \text{静尺长}/\gamma. \quad (4-1-3)$$

### 4.1.2　车库佯谬

设汽车与车库静长相等. 汽车匀速进库时，司机想“动库变短，车装不下.”司库想“动车收缩，装下有余.”司机的想法对吗？司库的想法对吗？利用时空图可以获得清晰的认识. 不失一般性，设汽车沿地面系的 $x$ 轴正向行驶. 为了由简入繁，我们分两种情况讨论.

**情况1　车库并无后墙，其“后墙”只是一条画在地上的直线.**

以地面系为基准画时空图（图4－2）. 库门和库“墙”自然是两条竖直线. 车头的世界线是一条斜率大于1的斜直线，与库“墙”世界线的交点记作 $b$，过 $b$ 的水平直线便是车库系的一条同时线，故 $l_{ab}$ 就是车库静长. 车尾世界线应与车头世界线平行，但这样的直线很多，选择时应体现已知条件——车与库静长相等. 设 $a$ 是过 $b$ 的水平线与库门世界线的交点，过 $a$ 作如图所示的校准曲线，它与汽车系过 $b$ 的同时线交于 $d$，再过 $d$ 作与车头世界线平行的直线便是车尾的世界线（这样作出的车尾世界线确能保证车与库有相等静长）. 时空图一旦画出，所余问题就迎刃而解. 司库认为 $a$，$b$ 点所在的同时线代表车头抵墙这一时刻（$t_b$ 时刻）的全空间，直线段 $ab$ 和 $eb$ 分别代表此时刻的库和车，由图可见 $l_{ab} > l_{eb}$，所以汽车装下有余. 司机则认为 $b$，$d$ 所在的同时线代表车头抵墙这一时刻（$t_b'$ 时刻）的全空间，直线段 $db$ 和 $fb$ 分别代表此时刻的车和库，由图可见 $l_{db} > l_{fb}$，所以库比车短，车装不下. 可见两人看法都对，关键是同时性的相对性导致结论的相对性. 不许提出这样的问题“到底装下还是装不下？”结论的相对性使这种绝对式的问题没有意义.

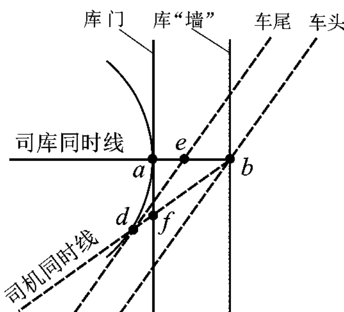



图4－2　车库佯谬时空图
（无真实后墙的情况）

**情况2　车库有坚硬后墙**

图4－3是这种情况的时空图. 车头在撞到后墙时（事件 $b$）被迫停下，世界线当即变成竖直线（与库墙世界线重合）. 然而“车头撞墙（因而停止前进）”的信息传到车尾需要时间，车尾在获悉此信息之前仍继续前进. 通常认为车头撞墙时会发出冲击波，只当冲击波传到车尾时才被车尾获悉（事件 $p$），车尾才不得不停下. 于是汽车将被压缩到在库中的确装下有余的程度（绝对的，谁看都装得下）.

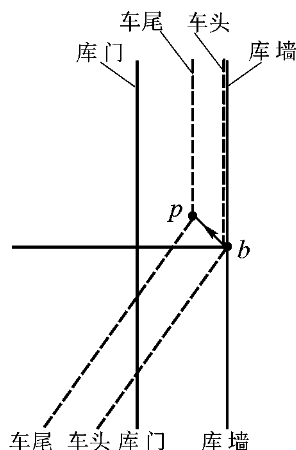



图4－3　车库佯谬时空图
（有坚硬后墙的情况）

## §4.2　钟慢效应

### 4.2.1　通常的钟慢效应

考虑惯性系 K 的两个标准钟 $C_1$，$C_2$ 和惯性系 K′的一个标准钟 C′. 3钟的世界线示于图4－4. 从 K 系看来，$C_1$，$C_2$ 钟静止而 C′钟运动. 开始时 C′钟与 $C_1$ 钟重合（事件 $o$），两钟调成指零. 一段时间后，C′

钟与 $C_2$ 钟重合(事件 $b$). 由"固有时间等于线长"可知 $C'$ 钟在 $b$ 点的读数等于 $l_{ob}$. $C_2$ 钟与 $C_1$ 钟同属 K 系，$x$ 轴是 K 系的同时线，既然 $C_1$ 钟在 $o$ 时读数为零，$C_2$ 钟在 $c$ 时读数也应为零. 故 $C_2$ 钟在 $b$ 时的读数 $l_{cb}=l_{oa}$. 过 $a$ 作校准曲线可知 $l_{ob}<l_{oa}=l_{cb}$，故 K 系认为 C′钟(动钟)较慢. 然而 K′系对此有不同意见，因为该系认为与事件 $o$ 同时的是事件 $d$(图 4－5)而非 $c$. 既然 $C_2$ 钟在 $c$ 指零，在 $d$ 就必有读数 $\delta>0$. 待 $C_2$ 钟运动到与 C′钟重合时(事件 $b$)，虽然 C′的读数 $l_{ob}$ 小于 $C_2$ 的读数 $l_{cb}$(两系都承认这一事实)，但不说明 C′钟较慢，因为在 C′读数为零的同时(按 K′的同时线判断) $C_2$ 读数已是 $\delta$(即 $C_2$ 作了"偷跑")，故应先从 $C_2$ 在 $b$ 的读数 $l_{cb}$ 减去 $\delta$ 再与 $l_{ob}$ 比较，即 K′认为应比较 $l_{db}$ 与 $l_{ob}$. 由过 $b$ 的校准曲线可知 $l_{ob}>l_{oe}=l_{db}$，故 K′系认为 $C_2$ 钟较慢，仍是动钟较慢. 图 4－6 是以上讨论的 3 维图示，其中(a)和(b)分别为 K 和 K′系的 3 维看法. 由此可再次看出 3 维看法依赖于参考系，只有时空图以及用 4 维语言的表述才与参考系无关.

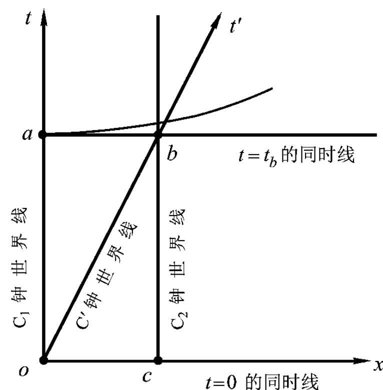



图 4－4　K 系根据同时线 $t=t_b$ 和 $t=0$ 认为 C′钟较慢

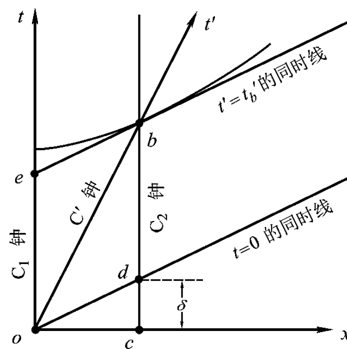
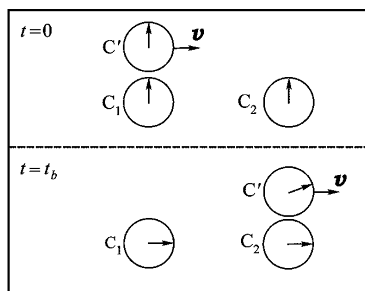
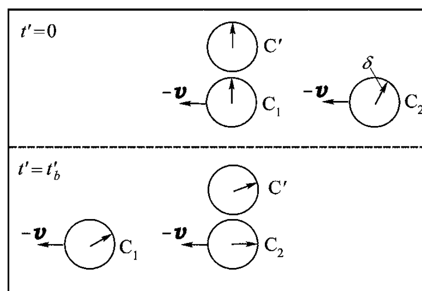



图 4－5　K′系根据同时线 $t'=t'_b$ 和 $t'=0$ 认为 $C_2$ 钟较慢




(a) K 系看法




(b) K′系看法

图 4－6　惯性系 K 和 K′的 3 维看法

下面用图 4－4 计算两钟读数的定量关系，为此只须计算线段 $oa$ 和 $ob$ 的线长. 由式(2－2－2)可知

$$l_{oa}=\int_o^a\sqrt{-\mathrm{d}s^2}=\int_o^a\sqrt{\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}x^2}=\int_o^a\sqrt{\mathrm{d}t^2}=t_a-t_o=t_a,$$

$$l_{ob}=\int_o^b\sqrt{-\mathrm{d}s^2}=\int_o^b\sqrt{\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}x^2}=\int_o^b\sqrt{\mathrm{d}t^2-(v\mathrm{d}t)^2}=\sqrt{1-v^2}\int_o^b\mathrm{d}t=\gamma^{-1}t_b=\gamma^{-1}t_a,$$

其中第三步是因为直线 $ob$ 满足 $x=vt$［见式(3－5－2)］. 对比两式便得动、静钟所走时间的定量关系

$$l_{ob}=\gamma^{-1}l_{oa}<l_{oa}. \qquad (4-2-1)$$

可见动钟较慢. 通常称此为钟慢效应(moving clocks run slow). 应该特别强调，这一效应至少涉及 3 个标准钟(图 4－4 的 $C_1$，$C_2$ 和 C′)，前 2 个是惯性系 K 内事先同步好的钟，第 3 个钟相对于 K 系做匀速直线运动. 如果没有 $C_2$，虽然同样可从图 4－4 知道 $l_{ob}<l_{oa}$，却无从得出"K 系觉得 C′钟慢"的结论，关键在于"觉得"两字无从谈起. 事件 $b$ 不在 $C_1$ 钟的世界线上，$C_1$ 钟不可能对它有直接感觉. $C_1$ 钟对 $b$ 进行测

**量的惟一办法是接收从 $b$ 发来的信号(例如光或声),而这就涉及光的传播时间所带来的问题.(不是不能这样做,而是这样做时必须考虑这一问题.)其实,借用 $C_2$ 钟得出"C′钟较慢"的结论时就已巧妙地发挥了光信号的"使者"作用,因为在把 $C_2$ 钟与 $C_1$ 钟调整同步时已经用到了光信号(见§3.2末段).总之,如果只有两个钟 $C_1$ 和 C′,就无法用上述方式比钟.这是常遭忽视的一个关键点.**

**注1 式(4-2-1)不但说明动钟较慢,还给出了慢的程度.英文文献常用"rate"代表快慢,本书愿意译作"走时率".但如果说"动钟的走时率较小",就会带来混淆.我们从讨论开始就约定3个钟都是标准钟,因此不但走时率相同,而且都是标准走时率(所走的时间等于线长).不过英语文献的确存在"动钟的 rate 较小"的说法,我们建议把这句话中的走时率改为"表观走时率",把钟慢效应说成"动钟的表观走时率较小".此外,也有不少作者愿意把"rate"译作"速率"[但要防止与钟(作为质点)的运动速率相混淆],这时最好把钟慢效应说成"动钟的表观速率较小".**

**注2 用时空图讨论时经常要计算线长,特别是要用到"横平竖直"地摆放着的直角三角形(例如图4-1的三角形 $oab$)的边长关系.由于关心的是闵氏线长,欧氏结论"勾股弦公式"不适用,代之而成立的是如下两个公式(把"长直角边"和"短直角边"分别简称为"长边"和"短边"):**

$$\text{长边长}=\gamma\times\text{斜边长};\tag{4-2-2}$$

$$\text{短边长}=v\times\text{长边长(对国际制 }v\text{ 要改为 }v/c).\tag{4-2-3}$$

**(其中 $v$ 代表所涉及的两个惯性系之间的相对速率,$\gamma\equiv 1/\sqrt{1-v^2}$.)前面在推导式(4-2-1)和(4-1-3)时已分别就图4-1和4-4两种情况证明了式(4-2-2);式(4-2-3)的证明则留作习题.对于长边类时的情况(例如图4-4),此式的物理意义很清楚:静钟认为动钟在长边代表的时间($l_{oa}$)内走了短边代表的距离($l_{ab}$),式(4-2-3)无非是"距离等于速率乘时间".长边类空的情况虽然没有这样的物理意义,但式(4-2-3)照样成立.**

#### 4.2.2 用洛伦兹变换证明尺缩钟慢[选读]

本小节前半部分用对话形式叙述,其中乙代表笔者.

**甲** 大多数教材都用洛伦兹变换(而不像您的书那样用时空图)证明尺缩钟慢效应,您对此有何述评?

**乙** 只要思维清晰,用洛伦兹变换当然也能讲清楚.

**甲** 不少教材在讲钟慢效应时都写出以下公式:

$$t_1=\gamma(t_1'+vx_1'),\qquad t_2=\gamma(t_2'+vx_2'),\tag{4-2-4}$$

$$t_2-t_1=\gamma[(t_2'-t_1')+v(x_2'-x_1')]=\gamma(t_2'-t_1')>t_2'-t_1',\tag{4-2-5}$$

然后说"$t_2-t_1$ 和 $t_2'-t_1'$ 分别是静、动钟经历的时间,所以动钟较慢."但我觉得式(4-2-4)是站在K′系上写出的,它认为自己静止而K系运动,故 $t_2-t_1$ 和 $t'_2-t'_1$ 应该分别是动、静钟经历的时间,如此说来,式(4-2-5)岂非表明动钟较快?

**乙** 不应说"式(4-2-4)是站在K′系上写出的".以其第一式为例,它无非是同一事件在两系的坐标($t_1,x_1$)与($t_1',x_1'$)之间的关系,不存在站在哪个系的问题(无论哪个系都承认这一关系).要弄清 $t_2-t_1$ 是动钟还是静钟经历的时间,必须一步一步地讲清楚.下面是我们用洛伦兹变换证明钟慢效应的讲法.首先,这一效应的比钟方式是K系的两个钟 $C_1$、$C_2$ 与K′系的一个钟C′做比较.我们约定站在K系看问题,所以也可说是两个静钟与一个动钟比较.其次,在写公式前应该明确定义两个事件:$p_1=(t_1,x_1)=(t_1',x_1')$ 代表C′钟与 $C_1$ 钟相遇的事件[图4-6(a)的上图,亦即时空图4-4的事件 $o$];$p_2=(t_2,x_2)=(t_2',x_2')$ 代表C′钟与 $C_2$ 钟相遇的事件[图4-6(a)的下图,亦即时空图4-4的事件 $b$],这样就知道:① $x_2'=x_1'$,所以式(4-2-5)的第二个等号成立;② 把C′钟从 $C_1$ 走到 $C_2$ 看作一个过程,$t_2-t_1$ 和 $t'_2-t'_1$ 分别就是K系的钟(静钟)和K′系的钟(动钟)测得的、这一过程经历的时间,所以 $t_2-t_1>t_2'-t_1'$ 说明动钟较慢,而且动钟的表观走时率只有静钟的 $1/\gamma$ 倍.

**甲** 这样讲是清楚的,但我还有个问题:如果站在K′系看问题,则C′是静钟而 $C_1$、$C_2$ 成了动钟.$t_2-t_1>t_2'-t_1'$ 岂不是表明动钟较快?

**乙** 这时 $t_2-t_1$ 不再能代表动钟在上述过程中经历的时间,因为K′系认为 $C_1$、$C_2$ 两钟并不同步.

**甲** 不是早就约定K系的各钟都是同步的吗?

**乙** 是的.同步是指各钟在任一同时面上读数相同,而K′系与K系有不同的同时面族,所以,K系认为同步的各钟,K′系必然认为不同步(认为自己指零时 $C_2$ 钟已有读数 $\delta>0$,即"偷跑"了),导致 $t_2-t_1$ 不再代表动钟在上述过程中经历的时间,详见围绕图4-5和4-6(b)所做的讨论.

**甲** 证明尺缩时是否也要先定义事件?

**乙**　是的. 为此，首先要明确静、动尺长的概念. 设尺子沿 $x'$ 轴静止在 K′系，该系测得的尺长(静尺长)显然就是尺子两端的坐标差 $x_2'-x_1'$. 但 K 系测得的尺长(动尺长)则要说清楚. 由于运动，尺子两端的坐标值不断变化，只有同时测得尺子两端的空间坐标，其差值才是动尺长. 具体操作如下：K 系观者在某时刻记下尺头和尺尾在地面留下的印记(依次记作 $A_1$ 和 $A_2$，如图 4－7)，等尺子走后再慢慢测量 $A_1$ 和 $A_2$ 的空间坐标. 定义两个事件：$p_1=(t_1,x_1)=(t_1',x_1')$ 代表尺头经过 $A_1$ 的事件；$p_2=(t_2,x_2)=(t_2',x_2')$ 代表尺尾经过 $A_2$ 的事件，便有 $t_1=t_2$，$x_2-x_1=$ 动尺长，$x_2'-x_1'=$ 静尺长. 由洛伦兹变换得

$$x_1'=\gamma(x_1-vt_1),\quad x_2'=\gamma(x_2-vt_2),\tag{4-2-6}$$

$$x_2'-x_1'=\gamma[(x_2-x_1)-v(t_2-t_1)]=\gamma(x_2-x_1),\tag{4-2-7}$$

可见动尺较短，其表观长度只有静尺长的 $1/\gamma$ 倍.




图 4－7　动尺长的测量

**甲**　我明白了. 但还有一个问题：$p_1$ 和 $p_2$ 对 K′系并不同时，为什么 $x_2'-x_1'$ 可以看作静尺长？

**乙**　静尺头尾的坐标不随时间而变($x_1'$ 和 $x_2'$ 都是常数)，无须同时测量.

用时空图解题和用洛伦兹变换解题各有优缺点. 但是无论如何，解题前画出时空图总是很有帮助的. 下面是 3 个例子.

**例 1**　事件 $p_1$ 和 $p_2$ 在 K 系的时间和空间间隔分别为 $8\times10^{-7}$ s 和 600 m，要使它们在 K′系为同时事件，K′与 K 系的相对速率 $v$ 应为何值？

**解法 1**　用时空图求解.

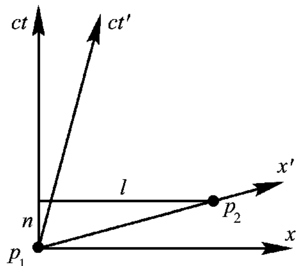



图 4－8　例 1 用图

图 4－8 中的 $l$ 和 $n$ 都代表线长，其国际制单位是 m. 已知 $l=600$ m，$n=c(t_2-t_1)=(3\times10^8\text{ m/s})\times(8\times10^{-7}\text{ s})=240$ m. 将式(4－2－3)用于图 4－8 得

$$\frac{v}{c}=\frac{n}{l}=\frac{240\text{ m}}{600\text{ m}}=0.4,$$

故　　$v=0.4\times(3\times10^8\text{ m/s})=1.2\times10^8\text{ m/s}.$　[**解毕**]

**解法 2**　用洛伦兹变换求解.

$$t_1'=\gamma\left(t_1-\frac{v}{c^2}x_1\right),\quad t_2'=\gamma\left(t_2-\frac{v}{c^2}x_2\right),\tag{4-2-8}$$

由已知 $t_1'=t_2'$ 得 $t_2-t_1=\dfrac{v}{c^2}(x_2-x_1)$，故

$$v=c^2\frac{t_2-t_1}{x_2-x_1}=(3\times10^8\text{ m/s})^2\times\frac{8\times10^{-7}\text{ s}}{600\text{ m}}=1.2\times10^8\text{ m/s}.$$

[**解毕**]

**例 2**　飞船以 $v=0.1c$ 的速率相对于地球匀速直线飞行. 设地面系测得某运动员以 $\Delta t=10$ s 的时间跑完 $l=100$ m，(a) 飞船测得跑道有多长？(b) 飞船测得运动员跑了多少米？

**解**　本题及下题用几何制求解，只在最后代入数值时才改用国际制.

与 $v=0.1c$ 相应的 $\gamma=1/\sqrt{1-0.1^2}=1/0.995$.

(a) 由尺缩关系可知飞船测得的跑道长度

$$l'=l/\gamma=0.995\times100\text{ m}=99.5\text{ m}.$$

(b) **解法 1**　用洛伦兹变换求解.

设起跑和冲刺事件分别为 $p_1=(t_1,x_1)=(t_1',x_1')$ 和 $p_2=(t_2,x_2)=(t_2',x_2')$，则 $t_2-t_1=\Delta t=10$ s，$x_2-x_1=l=100$ m. 以 $\lambda$ 代表飞船测得运动员所跑长度(从时空图 4－9 可清楚看出 $\lambda\neq l'$)，则 $\lambda=x_1'-x_2'$(由图 4－9 可知 $x_2'-x_1'<0$)，再用洛伦兹变换 $x_1'=\gamma(x_1-vt_1)$，$x_2'=\gamma(x_2-vt_2)$ 便得

$$\lambda=\gamma[v(t_2-t_1)-(x_2-x_1)].$$

将 $v=0.1c$，$t_2-t_1=10$ s，$x_2-x_1=100$ m 代入上式得

$$\lambda\approx3\times10^8\text{ m}.$$　[**解毕**]

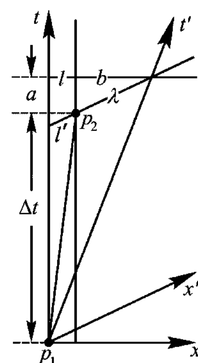



图 4－9　例 2 用图. $l,l',a,b$ 均为线长

**解法 2**　用时空图求解.

由式(4－2－2)得

$$\lambda=b/\gamma,\qquad \text{其中 }\gamma\equiv1/\sqrt{1-v^2}.\tag{4-2-9}$$

由式(4－2－3)得 $l+b=v(a+\Delta t)$ 及 $a=vb$，联立解得 $b(1-v^2)=v\Delta t-l$，即 $b=\gamma^2(v\Delta t-l)$，注意到 $\Delta t=t_2-t_1$，代入式(4－2－9)便得

$$\lambda=\gamma[v(t_2-t_1)-(x_2-x_1)]\approx3\times10^8\text{ m}.$$　[**解毕**]

**例 3**　静长为 $l$ 的容器以速率 $v$ 沿 K 系 $x$ 轴正向匀速平动，由容器尾端放出的粒子相对于容器以

速率$u'$匀速向前端运动，求K系测得的、粒子从尾端到达前端所用的时间$\Delta t$.

**解法1** 用洛伦兹变换求解.

设粒子"起跑"和"冲刺"事件分别为$p_1=(t_1,x_1)=(t_1',x_1')$和$p_2=(t_2,x_2)=(t_2',x_2')$，则$l=x_2'-x_1'=u'(t_2'-t_1')$，$\Delta t=t_2-t_1$. 由洛伦兹变换得

$$\Delta t=t_2-t_1=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left[(t_2'-t_1')+v(x_2'-x_1')\right]=$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{1}{u'}+v\right), \qquad (4-2-10)$$

对国际制则为

$$\Delta t=\frac{l}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\left(\frac{1}{u'}+\frac{v}{c^2}\right). \qquad \text{[解毕]}$$

**解法2** 用时空图求解.

选K系为基准系画时空图4-10，由式(4-2-2)得 $$\Delta t=\gamma(\mu_1+\mu_2). \qquad (4-2-11)$$

为看出$\mu_1$、$\mu_2$与静长$l$的关系，再以$\{t',x'\}$系(容器所在系)画一时空图(读者自画)，将式(4-2-3)用于该图得$\mu_1=l/u'$及$\mu_2=vl$，代入式(4-2-11)便得式(4-2-10). **[解毕]**

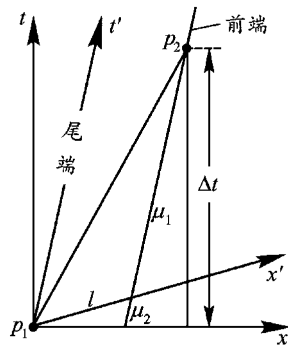



图4-10 例3用图

(第四讲未完，待续)

(上接57页)

作者得出结论，爱因斯坦并未为玻恩提过名. 这类事件说来简单，但都是本书作者经过不懈努力才得以澄清的.

本书作者通过比较分析玻恩本人、玻尔本人的回忆，玻恩的弟子以及同事的回忆、玻尔弟子以及周围人的回忆，指出了在建立量子力学时期玻恩与玻尔之间研究纲领上的截然区别：玻恩认为在当时的实验基础上，即使对于很多现象的意义还不清楚，仍然可以先建立数学体系以推进量子力学的建立过程；而玻尔则认为，在物理意义尚不清楚的前提下数学上想有所收获是不可能的. 然而事实证明，玻恩的想法是正确的. 在一定意义上，即使今天，关于量子力学的某些意义问题仍然不能说已经完全清晰了.

这本书名为《玻恩研究》，因此在玻恩身上着墨较多、较重. 但是通过对于玻恩的描述，也表达出了更多的有益信息. 如通过叙述玻恩的成长与受教育过程，指出了当时德国中小学教育的诸多弊端，这些弊端很值得我国的中小学教育注意并作出某些反思，因为有些弊端在我们这里不但存在而且有过之无不及. 而玻恩所难忘的德国高等教育的很多教育模式与理念，则非常值得今天我们的高等教育学习和借鉴.

一个成功的物理学家独特的研究方法和科学思想及其形成过程，对于成长中的年轻科学家是很有启发和教育意义的. 本书作者深入分析了玻恩的科学思想、科学方法及其形成过程.

科学家生活在人类社会之中，科学家的社会责任心和良知越来越为人们所关注. 玻恩是一个具有强烈社会责任心，关注人类现实和未来的科学大师. 本书作者分析了玻恩的社会责任心的形成原因及环境. 这在科学技术的社会作用越来越巨大的今天，探讨培养科学家的良知和社会责任感具有很好的启迪作用.

一位一流的物理大师，仍然难免自己做出的贡献被埋没或为他人张冠李戴，作者将这一事实提升为"玻恩现象"，并从多个方面探讨了这一现象产生的原因. 该书这一部分对于一位科学家，尤其是一个科学团队的带头人，会有一定的警示作用.

立足于对可靠、全面而新颖的文献资料的深入分析，本书在很多方面得到了与过去很多人云亦云之说不同的结论. 对于科学技术史或物理学史而言，这就是创新，这就是学术价值.

本书不仅是深入了解量子力学发展史的一部难得的佳作，而且也适合于物理专业师生阅读，适合于科学技术史研究者阅读，适合科学技术哲学研究者阅读(脱离科学技术史的科学哲学是空洞的)，适合于各层次教师和教育管理与研究者阅读，是一本值得推介的著作.

## 参考文献:

[1] 卢鹤绂. 哥本哈根学派量子论考释[M]. 上海: 复旦大学出版社，1984: 178-179.

[2] 厚宇德. 玻恩研究[M]. 北京: 人民出版社，2012: 204-205.

《从零学相对论》连载

# 《从零学相对论》连载⑧

梁灿彬[1]，曹周键[2]

(1. 北京师范大学 物理系，北京 100875; 2. 中科院 应用数学所，北京 100190)

### 4.2.3 不同比钟方式有不同结果

狭义相对论和广义相对论都经常谈到钟慢效应，它一定涉及钟与钟的读数比较问题. 谈及钟慢效应时，常遭忽视的一个问题就是钟与钟如何比较，也就是比钟方式问题. 式(4-2-1) 给出的是通常比钟方式的结果，这一方式已清楚地约定在图 4-4 中，这种方式实质上是要比较 $l_{oa}$ 和 $l_{ob}$，结果是 $l_{ob}<l_{oa}$，即 C′钟较慢. 应该强调的是，比钟方式是多种多样的，不同方式导致不同结果. "种瓜得瓜，种豆得豆." 因此在讨论比钟问题时必须事先明确约定比钟方式的每一细节. (可惜许多人对此很不注意，他们往往不问清比钟方式就忙于推出结论.) 上小节的通常比钟方式和结果虽然广为人知(所有狭义相对论教材都要介绍)，却只是众多比钟方式的一种，其特点是必须有 3 个钟 $C_1$，$C_2$ 和 C′，前 2 个是同一惯性系内事先同步好的钟. 在只有 2 个钟 C 和 C′的情况下倒是存在着很有直观意义的比钟方式. 例如，图 4-11 表示携带 C 钟的观者 G 采用如下办法比钟: 他在时刻 $a$ 用左右两眼分别看钟 C 和 C′. 所谓"用右眼看 C′"是指右眼在时刻 $a$ 收到 C′在某时刻 $e$ 发来的光(光子从 $e$ 沿着指向未来的光子世界线到达 $a$). 设两钟在相遇时(事件 $o$) 都指零，则 C 钟在 $a$ 点的读数等于 $l_{oa}$，C′钟在

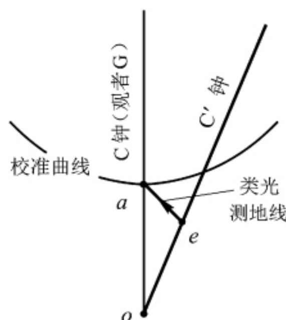



图 4-11 G 在 $a$ 时用左眼看自己的钟 C，右眼看动钟 C′，发现动钟更慢

$e$ 点的读数等于 $l_{oe}$. 由于 $l_{oe}<l_{oa}$，观者 G 将同样得出"动钟较慢"的结果，只是比图 4-4 的方式慢得更甚. 为定量计算慢的程度，可过 $e$ 作水平线交 C 钟世界线于 $f$(见图 4-12). 令 $\tau\equiv l_{oa}$，$\tau'\equiv l_{oe}$，则待求量应为 $\tau'/\tau$. 为简单起见，记 $m\equiv l_{of}$，$n\equiv l_{fa}$，则 $n$ 也等于 $l_{fe}$(理由见注 3). 由图易见

$$\tau=m+n. \qquad (4\text{-}2\text{-}12)$$

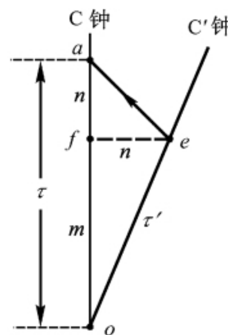



图 4-12 求 $\tau'/\tau$ 的简捷方法

以 $\{t,x\}$ 代表 C 钟所在惯性系，则该系认为 C′钟在时间 $m$ 内走过距离 $n$，以 $u$ 代表 C′钟相对于该系的速率，便有 [其实就是式(4-2-3)]

$$n=um. \qquad (4\text{-}2\text{-}13)$$

此外，由式(4-2-2) 又知

$$\tau'=\gamma^{-1}m. \qquad (4\text{-}2\text{-}14)$$

于是

$$\frac{\tau'}{\tau}=\frac{m}{\gamma(m+n)}=\frac{1}{\gamma(1+n/m)}=\frac{1}{\gamma(1+u)}=\frac{\sqrt{1-u^2}}{1+u}=\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}. \qquad (4\text{-}2\text{-}15)$$

上式表明:

(1) $\tau'/\tau<1$，可见动钟较慢;

(2) $\tau'/\tau<1/\gamma$，可见动钟慢的程度比用图 4-4 的比钟方式更甚.

以上两例已经说明不同比钟方式带来不同结果. 甚至还可以举出这样的比钟方式(图 4-13)，它竟导致动钟较快! 设 C 和 C′钟相遇时(事件 $o$) 均指零，则观者 G 在时刻 $a$ 用两眼分别看 C 和 C′钟都

得负的读数．由图易见 $l_{oa}<l_{oe}$，故 C′钟的读数比 C 钟的读数负得更甚．于是观者 G 认为动钟较快．这个乍听似乎荒谬的结论其实无可非议，它不过是图 4-13 的特定比钟方式的结果．因此，讨论比钟问题时必须事先说明比钟方式的每一细节，而为此最好先画时空图．如果只用 3 维语言构思比钟方式，有时可能会缺少细节（已知条件不全），但一画时空图就能发现．

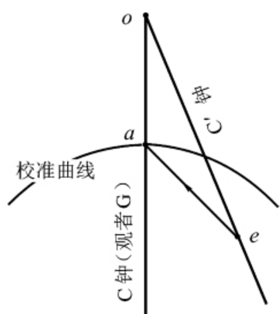



图 4-13　G 在 $a$ 时用左眼看自己的钟 C，右眼看动钟 C′，发现动钟较快

作为习题，请读者求出图 4-13 的 $\tau'/\tau$ 之值，其中 $\tau\equiv -l_{ao}$，$\tau'=-l_{eo}$．答案是

$$\tau'/\tau=\sqrt{(1+u)/(1-u)}>1. \quad (4-2-16)$$

**注 3**　式（4-2-12）前曾说过，若设 $n\equiv l_{fa}$，则也有 $n\equiv l_{ef}$（图 4-12）．这是为什么？你也许会说“三角形 $aef$ 的斜边与两直角边的夹角都是 45°，所以等腰．”然而这是欧氏几何的结论，不足信．不过用闵氏几何也不难证明（在这个问题上欧氏眼光不带来欺骗），为此只须借用基准坐标系｛$t$，$x$｝分别计算线长 $l_{fe}$ 和 $l_{fa}$（请注意前者类空后者类时）：

$$l_{fe}=\int_f^e\sqrt{\mathrm{d}s^2}=\int_f^e\sqrt{-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}x^2}=\int_f^e\sqrt{\mathrm{d}x^2}=x_e-x_f,$$

$$l_{fa}=\int_f^a\sqrt{-\mathrm{d}s^2}=\int_f^a\sqrt{\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}t^2}=$$

$$\int_f^a\sqrt{\mathrm{d}t^2}=t_a-t_f=x_e-x_f=l_{fe},$$

其中倒数第二步用到光子世界线 $ea$ 是 45°斜直线．

［选读 4-1］

关于比钟方式的多样性问题，著名相对论学家、芝加哥大学教授格柔池（Geroch）在他的小册子“General relativity from A to B”中（见文献［1］）有若干精辟的论述，下面是该书第 132—133 页的部分摘译：

现在考虑“走时过快”和“走时过慢”这两个词汇，它们是我们日常生活中的日常用词．……人们可以用许多不同方式借实验来判断一个钟是否“走时过快”．你可以把它放在一个走时正常的钟旁；你可以从一定距离处看它并与正常钟作比较；你可以借助光脉冲的反弹回收来制造一种“公平比较”的方式……；如此等等．在日常生活中所有这些不同比较方式都用“走时过快”一词来表述，其原因当然是因为在日常生活中它们都给出相同答案，没有必要发明不同的词汇来描述不同的比较方式……．反之，在相对论中，不同比较方式一般给出不同答案．那个单一的、无所不包的词汇“走时过快”不再够用．如果你想知道结果，你必须对你打算做的实验的细节给出过细的描述，而不能只问“它是否走时过快”．……据我所知，爱斯基摩人有 25 个不同词汇来表达雪，……而我们却只有一个．我敢保证，如果光走得比实际情况慢得多，我们在日常生活中就会有类似于 25 个那样多的不同词汇来表达“走时过快”．

## 4.2.4　多普勒频移

光波是光源内部机制的某种振动向外发出的电磁波．最简单的振动是简谐振动（有单一的频率），相应的光波是简谐电磁波（因波长单一而称为单色光）．设观者 $G_2$ 携带的简谐光源向观者 $G_1$ 发光，光源的两个相邻波峰（正最大值）发生在 $p_2$ 和 $p_2'$（图 4-14），则线段 $p_2p_2'$ 的线长 $\Delta\tau_2$ 就是 $G_2$ 测得的光波的周期，而图中的 $p_1p_1'$ 段的线长 $\Delta\tau_1$ 则是 $G_1$ 收到的光波的周期．过 $p_1$ 作 $G_2$ 的平行线 $G_3$，以 $\Delta\tau_3$ 代表 $p_1q$ 段的线长，则 $\Delta\tau_3=\Delta\tau_2$，再用小节 4.2.3 的计算方法不难证明

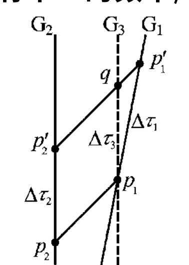



图 4-14　光波的多普勒红移

$$\Delta\tau_3/\Delta\tau_1=\sqrt{(1-u)/(1+u)}, \quad (4-2-17)$$

［证明留作练习，其实此题与图 4-12 本质一样，上式与式（4-2-15）本质相同．］由上式得

$$\Delta\tau_2/\Delta\tau_1=\sqrt{(1-u)/(1+u)}. \quad (4-2-17')$$

以 $\lambda_2$ 和 $\lambda_1$ 分别代表 $G_2$ 和 $G_1$ 测得的光波波长，由波长与周期成正比便得

$$\lambda_1/\lambda_2=\sqrt{(1+u)/(1-u)}>1. \quad (4-2-18)$$

可见 $G_1$ 测得的波长较大，即 $G_1$ 看到的颜色比 $G_2$ 看到的颜色向红的方向偏移．这就是所谓的红移（redshift）．这种红移起因于相对运动，与声波的多

普勒频移类似，故称为光波的多普勒红移. 图4-14代表光源与观者相背(渐行渐远)而行的情况，结果出现红移. 反之，如果两者相向运动(渐行渐近)，则观者测得的波长比光源测得的要短，故称多普勒蓝移.

### 4.2.5 钟慢尺缩效应的实验验证

验证钟慢效应的关键是要找到一个高速运动的标准钟. 物理学界早就知道许多高能粒子以接近光速的高速运动，而它们的衰变固有寿命又使它们可以充当标准钟，自然难能可贵. 高能粒子有两大来源，一是高能加速器，二是宇宙射线(宇宙空间中各种高能天体现象产生的高能粒子流). 取自这两种来源的多种高能粒子(如π介子、μ子①和K介子)都曾被用来成功地验证过钟慢效应，而且精度不断提高(详见文献[2]). 此处只介绍利用宇宙线中的μ子所做的实验. 这方面的首次实验是Rossi and Hall(1941)完成的(见文献[3]). 后来，Frisch and Smith(1963)对此又做了重要的实质性改进(见文献[4])，得出了更为精确的结果，并将实验过程及仪器拍成一部很有影响的教学电影. μ子是在高空大气层中由π介子衰变而来的，它们又要衰变为其他粒子. 虽然一大堆μ子中的每一个可以有非常不同的存活期(寿命)，但是可以统计性地谈及它们的平均寿命[定义见式(4-2-19)后]. 因此，可以把一大堆μ子整体地看作一个标准钟. 不过，为了帮助理解，不妨先对单个μ子做一理想化讨论. 一个静止μ子从产生到衰变的时间称为它的静止寿命. 考虑一个静止寿命为2 μs(即$2\times10^{-6}$ s)的μ子，在6 km的高空产生后向地球以$u=0.995c$的高速飞奔而下. 如果不考虑相对论效应，就算它以光速飞行，在存活期内也只能走过

$$(3\times10^{8}\ \mathrm{m/s})\times(2\times10^{-6}\ \mathrm{s})=600\ \mathrm{m},$$

根本无望到达地面. 然而，由于地球系K认为μ子在高速运动，动钟较慢，所以测得它的寿命("运动寿命")比静止寿命2 μs要长. 图4-15是这一情况的时空图. 虽然静止寿命只有$\Delta t'=2$ μs，但由钟慢效应可知$\Delta t=\gamma\Delta t'$，其中

$$\gamma\equiv\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-(0.995)^2}}\approx10,$$

故地球系测得该μ子的运动寿命是静止寿命的10倍，即 $\Delta t=10\Delta t'=10\times2\ \mu\mathrm{s}=20\ \mu\mathrm{s}$.

μ子在这段时间内走过的距离为

$$\Delta x=u\Delta t=(0.995\times3\times10^{8}\ \mathrm{m/s})\times(2\times10^{-5}\mathrm{s})\approx6000\ \mathrm{m}.$$

可见该μ子在存活期内正好能走过从产生处(6 km高空)到衰变处(地面)的距离. 请注意这里的钟慢效应同样涉及3个钟，其一是μ子(地球系K认为的动钟)，另外两个则是K系的、事先同步好的高空钟$C_1$和地面钟$C_2$，它们在事件$o$和$q$都指零.

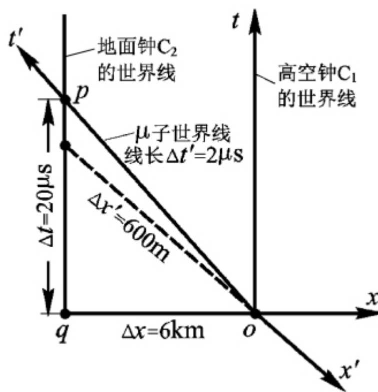



图4-15 μ子"从天而降"时空图. 事件$o$代表μ子产生，事件$p$代表μ子死亡

有人问：站在μ子系K′的立场思考，虽然地球(带着地面钟$C_2$和高空钟$C_1$)向自己高速飞来，但自己的寿命只有2 μs，而且出生时(事件$o$)与高空钟$C_1$相遇，地面钟怎能在如此短暂的时间内走完全程6 km？答案是：现在应考虑尺缩效应. 把$C_1$和$C_2$看作一把很长的尺子的头和尾，则$\Delta x=6$ km就是静尺长. 但K′系认为尺子在高速运动，由尺缩效应可知动尺长只有(仍见图4-15)

$$\Delta x'=\gamma^{-1}\Delta x=600\ \mathrm{m}.$$

可见，虽然μ子认为自己只存活了2 μs(而且出生时遇到尺头$C_1$)，但死亡(衰变)时恰能遇到尺尾(地面). 就是说，μ子认为，虽然地面在2 μs内向着自己只走了600 m，但这正好就是(缩短之后的)尺长，所以地面能在自己死亡前及时赶到自己身边. 有兴趣的读者不妨补画以μ子系K′为基准系的时空

① 过去曾把μ子称为μ介子，后来发现其性质与电子很像，在粒子分类中应该与电子一样属于轻子(lepton)而不属于介子(meson)，故改称为μ子. 但μ子与电子也有两个显著区别：1) μ子质量约为电子质量的207倍；2) 电子几乎"长生不老"，其平均寿命为$10^{32}$年；μ子的平均寿命却只有2 μs.(不过，在粒子世界中2 μs已经是很长的寿命了.)

图,由于接近光速,尺子头、尾的世界线将异常靠近.

可见,μ 子实验对钟慢、尺缩效应都给出令人信服的验证,是非常成功的"一箭双雕"的事例.

[选读 4-2]

然而以上只是为教学法目的而设的简化讨论.在宇宙线的实验中无法对 μ 子做单个跟踪测量,只能对处于某一速率段内的一批 μ 子进行观测.作为放射性粒子,μ 子的衰变也服从如下的指数衰变律:

$$n = n_0 e^{-t/\tau_0}, \qquad (4-2-19)$$

其中 $n$ 和 $n_0$ 分别代表 $t$ 秒和 0 秒时的 μ 子数,$\tau_0$ 是常数.上式表明当 $t=\tau_0$ 时 $n=n_0/e$,可见,经过 $\tau_0$ 秒后的 μ 子数只剩下开始时的 1/2.7 倍,人们就把 $\tau_0$ 称为 μ 子的平均寿命(average lifetime)[①].式(4-2-19)是狭义相对论问世前就有的实验公式,适用于静止的放射性物质.现在自然要问:它对高速 μ 子也适用吗?以 K 和 K′分别代表地球系和 μ 子所在的惯性系.由于 K′认为 μ 子静止,式(4-2-19)当然适用,只不过要把式中的 $t$ 改为 K′系的时间坐标 $t'$,即

$$n = n_0 e^{-t'/\tau_0},$$

(其中 $n$ 和 $n_0$ 应理解为 $t'$ 秒和 0 秒时的 μ 子数)再以 $u$ 代表 μ 子相对于地球的速率,令 $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-u^2/c^2}$,由钟慢效应便有 $t'=t/\gamma$,故

$$n = n_0 e^{-t/\gamma\tau_0}, \qquad (4-2-20)$$

现在应该强调,$\tau_0$ 代表的只是静止 μ 子的平均寿命,由上式不难看出 $\gamma\tau_0$ 才是运动 μ 子的平均寿命.下面就可简介 Frisch and Smith (1963)的实验.

μ 子在高空产生后以大于 $0.99c$ 的速率向地球飞奔而下,某些 μ 子在飞行中会衰变,所以 μ 子总数不断减少.实验者选择美国的华盛顿山[②]的山顶实验室和哈佛大学[③]的地面实验室分别作为测量 μ 子数目的中途站和终点站.在两站各用仪器测出速率介于 $0.995\,0c$ 和 $0.995\,4c$ 之间的 μ 子数,便可依次充当式(4-2-20)的 $n_0$ 和 $n$.实验测得值为

$$n_0 = 563, \qquad n = 408.$$

在实验室中还可用设备拦住 μ 子,从而测量其静止时的平均寿命,得值为 $\tau_0 = 2.2\times10^{-6}$ s.此外,已知山顶站与地面站的高度差 $L = 1\,907$ m,故式(4-2-20)的 $t$ 应为

$$t = \frac{L}{u} = \frac{1\,907\ \text{m}}{0.995\times(3\times10^8\ \text{m/s})} = 6.4\times10^{-6}\ \text{s}.$$

把式(4-2-20)的 $\gamma$ 看作待求量(而不是 $u$ 的函数,即不管 $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-u^2/c^2}$),将以上数值代入该式便得

$$\exp\left(-\frac{1}{\gamma}\frac{t}{\tau_0}\right) = \frac{n}{n_0} = \frac{408}{563} = 0.72,$$

故 $$0.72 = \exp\left(-\frac{1}{\gamma}\frac{6.4}{2.2}\right) = \exp\left(-\frac{2.9}{\gamma}\right),$$

进而求得 $$\gamma = \frac{2.9}{\ln(1/0.72)} = 8.8.$$

这一 $\gamma$ 值是根据实测的一批数据(如 563 和 408)求得的,实验者称之为 $\gamma$ 的观测值,并记作 $\gamma_{观测}=8.8$.另一方面,因子 $\gamma$ 又出现在狭义相对论的质能关系式 $E=\gamma m_\mu c^2$ 中.[此式即第 5 讲的式(5-5-2),式中的 $m_\mu$ 代表 μ 子的静质量.]实验时又测得 μ 子在飞行中的能量平均值 $E$,代入 $E=\gamma m_\mu c^2$ 中便可求得 $\gamma=8.4$,实验者称之为 $\gamma$ 的理论预言值,不妨记作 $\gamma_{预言}=8.4$,在实验误差范围内可以认为与 $\gamma_{观测}=8.8$ 符合得相当理想.　[选读 4-2 完]

(第四讲未完,待续)

① 莫将"平均寿命"与"半衰期"相混淆,后者是指粒子数减半所经历的时间.

② 即 Mt. Washington,位于美国的 New Hampshire(新罕布尔州).

③ 即 Harvard University,位于美国的 Cambridge,Massachusetts(马萨诸塞州的坎布里奇市).马萨诸塞州是新罕布尔州的邻州.

(上接 61 页)

## The influence of the magnitude and the frequency of electrical field on the diffraction in liquid crystal cell

ZHANG Yu, ZENG Zhen-tao, LIAO Hong-bo

(Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

**Abstract:** The diffraction phenomenon occurred in a high-twisted nematic liquid (HNL) crystal cell is observed. It is known that such kind of diffraction is due to the fomiation of so-called Williams domain. How this diffraction depending on the magnitude and the frequency of the electrical AC field applied on the HNL cell is also studied in detail.

**Key words:** high-twisted nematic liquid crystal cell; Williams domain; diffraction

《从零学相对论》连载

# 《从零学相对论》连载⑨

梁灿彬[1]，曹周键[2]
（1. 北京师范大学 物理系，北京 100875；2. 中科院 应用数学所，北京 100190）

## §4.3 双子效应（佯谬）

### 4.3.1 双子效应的戏剧性描述

乘坐高速飞船遨游太空的某君归来后竟成了特大新闻人物，因为所有人都发现他比他的孪生兄弟较为年轻. 这就是所谓的双子佯谬. 把“双子佯谬”再戏剧化为“夫妻佯谬”则更为刺激. 一对年龄相同的俊男靓女喜结良缘，欢度蜜月. 蜜月后丈夫因公出差，乘坐高速飞船到其他星球处理公务. 归来时人们惊讶地发现：夫君依旧是风度翩翩的白马王子，妻子已然是风烛残年的耄耋老妪. 此时人们不免想起“山中方七日，世上已千年”的民间传说. 这种怪事可能发生吗？根据狭义相对论，从理论上说的确可能，而且早在 1971 年就已被实验所证实，当然不是用人而是用铯原子钟（详见小节 4.3.4）. 为了造成前面形容的巨大年龄差异，飞船必须经历（至少在部分时间内经历）非常极端的运动状态，这是人体所无法承受的. 但是，从纯理论上讲（抛开人体的生理限制），“山中方七日，世上已千年”在原则上是可以实现的. 理由如下.

### 4.3.2 双子效应的几何剖析

利用 4 维几何语言可对双子效应给出最为简单、清晰和准确的剖析. 首先说明一点. 从理论上说，这一效应完全与地球无关，但形象（戏剧性）的陈述难免涉及地球. 为了免除毫无必要的复杂性，人们在做纯理论讨论时默默约定：① 近似认为地球做惯性运动；② 忽略地球的引力场，因而只涉及平直时空. 图 4－16（a）是在此约定下的时空图（以地面系为基准）. 兄弟甲守在家中，是惯性观者，其世界线是竖直线（类时测地线）. 兄弟乙外出遨游，其世界线不可能为测地线，否则将一去不复返. $p,q$ 两点分别代表分手和重逢事件. 已知分手时甲乙年龄相等，重逢时还等吗？如果不等，孰大孰小？为回答这一问题，只须比较甲乙两人在事件 $p,q$ 之间各自经历的固有时间，也就是比较甲乙两线介于 $p,q$ 之间的线长 $l_甲$ 和 $l_乙$. 因为闵氏时空中两点间的类时测地线是该两点间的类时曲线的最长者（见 §2.5 末），所以 $l_甲 > l_乙$，可见重逢时乙比甲年轻. 若要定量地求得 $l_甲$ 与 $l_乙$ 的关系，就要把乙的世界线具体化，因为两点之间的不同曲线一般有不同线长. 最简单的情况如图 4－16（b），这时乙的世界线是由两段直线组成的折线，借助于横竖三角形关系（§4.2 注 2）易得 $l_甲 = \gamma l_乙$，其中 $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-u^2}$，$u$ 是两段斜直线相应的速率. 利用此式不难算出，① 设分手时两人皆为 20 岁，欲使重逢时甲为 60 岁而乙为 30 岁，只须 $u \approx 0.968c$；② 为了实现“飞船方七日，世上已千年”，只须 $u \approx 0.999\,999c$.

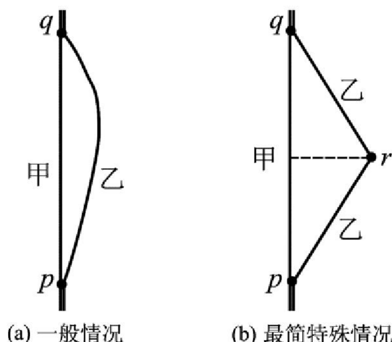



图 4－16 双子效应时空图

你看，只要你学了“一点点几何”，双子效应就是如此简单明了，几句话便可讲得一清二楚. 与那些 3 维语言的、长篇大论的讨论相比（姑且不论其中还有许多似是而非甚至根本错误的讨论），你不觉得 4 维语言在这个问题上具有“四两拨千斤”的功效吗？但是，如果你连这一点点几何都不懂，就只好用 3 维语言思考，就要碰到一系列需要很高智商方可解决的问题. 谈到智商，不妨打个比喻. 小学算术的鸡兔同笼问题属于难题，它考验着小学生（及其家长）的智商. 进入初中后，学了代数方程就有法可循，只要列出方程求解，鸡兔问题便易如反掌. 本书笔者一直认为，在某种意义上说，数学是高智商的数学家为一

般智商的大众发明的,就像"傻瓜式照相机"是为芸芸众生发明的那样.这种例子不胜枚举.4维语言颇像傻瓜相机,它使大量相对论问题变得简单容易.双子问题就是典型实例.在4维语言普及之前,双子问题难倒了不知多少物理学家,在历史上多次掀起论战,详见下一小节.

[选读4-3]

本选读采用对话方式,其中乙代表笔者.

**甲** 请您说明"钟慢效应"、"时间膨胀"和"双子效应"的联系和区别.

**乙** "钟慢效应"和"时间膨胀"是对同一现象的两种不同称谓.这一现象已示于图4-4中.图中$o$和$b$是发生在惯性系K′内的C′钟上的两个事件,该图前后的讨论表明,不同惯性系测量这两个事件的坐标时间间隔得值不同,其中最小者就是K′系自己测得的时间间隔(即$l_{ob}<l_{oa}$),其值就是C′钟的固有时间(钟的固有时间等于钟所在惯性系的坐标时间).因为K系认为C′钟在运动,所以$l_{ob}<l_{oa}$表明动钟较慢,此即"钟慢效应",又称"时钟延缓效应".英文文献更多地称此效应为"时间膨胀(time dilation)",据说是因为它反映动钟的时间尺度被表观地抻长了(the scale of time is apparently stretched out).

**甲** "双子效应"与"钟慢效应"都是关于钟的读数的效应,两者是否也是同一效应?

**乙** 不,两者非常不同,根本区别就是:钟慢效应涉及的都是做惯性运动的钟,因此结果必然是相对的——你觉得我慢,我觉得你慢;而双子效应的两钟之中必定有一个不做惯性运动,否则一去不返,一旦分手就不再重逢.因此结果是绝对的——守在家中的兄弟年龄较大.

[选读4-3完]

#### 4.3.3 双子"悖论"的长期论战

爱因斯坦在1905年的第一篇相对论论文中就讨论过时钟问题,并对后来被称为双子效应的问题给出过正确的定量预言[他在该文§4中给出了相当于式(4-3-8)(第一个等号)的公式].然而当时的物理学家和哲学家对此众说纷纭,莫衷一是.反对者的主要看法是(改用双子方式陈述):家中的兄弟甲之所以觉得归来的兄弟乙较年轻(钟走得较慢),是因为他觉得自己静止而乙曾经先离开后返回(走了一圈),因而是个动钟.但是,站在乙的立场,他会觉得自己静止而甲曾经先离开后返回(走了一圈),因而甲成为动钟.按照同样推理,重逢时必定会觉得甲较年轻.于是,兄弟重逢时都将觉得对方年轻,这当然不合理.于是成为悖论,这就是著名的**时钟悖论**(clock paradox)或**双子悖论**(twin paradox).这一"悖论"曾经引起许多物理学家的多次论战,成为20世纪持续时间最长、争论最激烈的物理辩论之一.仅以1956—1958年的一轮辩论高潮为例,辩论双方以物理学家**麦克利**(McCrea)和物理兼哲学家**丁苟**(Dingle)为代表人物,文章发表在《自然(Nature)》、《科学(Science)》和《发现(Discovery)》等重要杂志上.引发这场辩论的种子是麦克利在1951年针对时钟悖论发表的短文(文献[5]),他在该文称:"据我所知,人们至今尚不清楚这里其实并无悖论."然后对一种最简单的情况[实质上就是图4-16(b)]进行计算(我们对此不做评论)并得出$l_{乙}=\gamma^{-1}l_{甲}$这一正确结论.1956年(当时认为太空飞行有望实现,双子悖论再度备受关注),丁苟发表长文(文献[6])批驳麦克利,他认为,根据相对性原理,一切都是相对的、双子甲乙运动情况完全一样(是对称的),因此重逢时应有相同年龄.他甚至针对图4-16(b)的情况做了长篇讨论和计算(但都是错的),竟然"证明"了两人重逢时年龄相等.在稍后的交锋中①,麦克利针锋相对地、正确地指出,相对论并不认为一切都是相对的,乙有加速度而甲没有,正是这一绝对的差别(非对称性)导致重逢时年龄不同.从物理角度看,乙必须几次开启和关闭引擎,这是甲乙双方的实质性区别,使用相对性原理无助于抹杀这一区别;从数学角度说,甲的世界线是测地线(因而最长),而乙的世界线是由几段测地线组成的非测地线(因而比甲线短).丁苟则反驳说,既然麦克利也承认引擎每次工作时间极短,由引擎导致的甲乙两人的"绝对差别"也就消失.至于测地线,丁苟甚至说"他关于测地线的谈论完全是对所论问题的荒唐古怪的、毫无用处的推广."鉴于丁苟固执地坚持甲乙两人毫无差别,完全对称,麦克利在稍后的一篇短文中甚至说(括号内容是本书笔者所加):"如果空间旅行者(返航时)的运动足够剧烈,正是这个旅行者,而不是丁苟(他呆在地球上),将会摔死.丁苟与这样一个最终变成尸体的旅行者是不对称的."两人接着还有若干回合的交锋,然后以双方坚持己见的方式

① 丁苟与麦克利交锋的论文很多,其中一部分被集结为一篇题为《Relativity and space travel》的文章,发表在Natue杂志的1956(April 28和September 29)上.

暂时休战.其他学者后来还掀起过大小不等的论战高潮,直至1971年的原子钟环球飞行实验(见下一小节)证实了两钟历时不等才算大体平息.在4维几何语言已被国际相对论界广为应用的今天,双子问题在理论上是如此简单,"悖论"不悖,至多不过是个佯谬(假的谬误)而已.

应该特别强调的是,许多人顾名思义地以为"在相对论中一切都是相对的",这是一种极其有害的误解.除了双子问题之外,笔者还曾多次看到这一误解在不同问题上带来的灾难性后果.其实,要想学好相对论,更重要的是要学会在遇到绝对的对象时善于紧抓不放.不错,钟慢效应(见小节4.2.1)是相对的——甲觉得乙慢,乙觉得甲慢,而且慢的程度相同.但那是因为前提本身就是相对的——两钟都做惯性运动,因而,根据相对性原理,两者必然平权.然而双子问题中的两者却有绝对的差异,因为甲做惯性运动而乙做非惯性运动(否则不可能与甲重逢①).前提的这种绝对差别必然带来后果的绝对不同——兄弟俩重逢时年龄不等,根本不存在什么悖论!至于两人中谁较年轻,前面已看到用世界线长几乎一望而知,易如反掌.然而,在相对论发展的早期,多数物理学家尚未掌握几何语言(不知"世界线长"为何物,更不知它等于固有时间),而用物理语言把"乙比甲年轻"的道理彻底讲清又决非易事,曾经难住过不知多少物理学家(爱因斯坦是少有的例外).由于百思不解,他们纷纷以为只能求助于广义相对论.于是"要讲清双子问题非用广义相对论不可"的说法就应运而生并且泛滥成灾,至今仍有大量物理工作者持有这种观点.导致这一误解的一个重要原因是,他们以为,① 为计算乙所经历的时间必须使用与乙固连的坐标系(非惯性系);② 只要涉及非惯性系就属于广义相对论范畴.我们的评述是:① 乙经历的时间就是其世界线长,线长是几何量(是绝对的),与坐标系无关,根本没有必要舍近求远、自找麻烦地用与乙固连的坐标系(非惯性系)计算;② 退一万步说,就算你用非惯性系计算,这也同广义相对论无关.广义相对论是爱因斯坦的引力理论(当引力足够弱时近似回到牛顿的引力论),它认为引力实质上是4维时空的弯曲在3维空间的表现(详见§6.1).因此广义相对论与狭义相对论的根本区别在于时空背景——前者是弯曲时空;后者是平直(闵氏)时空.由于早已约定忽略地球引力,双子问题的默认时空背景当然是闵氏时空,因而与广义相对论毫无关系.诚然,在相对论的早期,在几何意识尚未深入人心的情况下,人们(包括爱因斯坦)曾经以坐标系为标准对广义相对论和狭义相对论划界,认为只要涉及非惯性系就算是广义相对论范畴.然而这种划界方式有太多的人为性.仍以双子问题为例,本书的计算只用到惯性系(用于计算线长),而有些人则还选了非惯性系,如果坚持以坐标系划界,就只好说"本书的双子问题属于狭义相对论范畴",而"那些人的双子问题属于广义相对论范畴".你不觉得这种讲法很丑陋吗?你不觉得改用绝对的时空几何来划界要漂亮得多吗?事实上,现代国际广义相对论界的统一划界标准是:凡以闵氏时空为背景的物理学都属于狭义相对论物理学,而广义相对论物理学则必然涉及弯曲时空(详见§6.1).讨论相对论问题时,一个十分重要而又常遭忽视的步骤就是事先明确约定时空背景,即约定所讨论的物理现象在什么时空中发生.双子问题的前提约定是整个现象发生在闵氏时空中,因此自然属于狭义相对论范畴.不幸的是有人甚至走得更远,误以为加速度会造成时空弯曲②,于是就认为双子问题非用广义相对论解决不可.这时就已经不是划界标准问题,而是大错.你看,明明约定在平直时空中讨论问题,他三转两转竟然转出个弯曲时空来,与"时空的绝对性"大相径庭,焉能不错!?

与双子佯谬类似的另一热门话题是爱因斯坦转盘问题,也常被误以为涉及广义相对论,其实前提约定也是整个现象(转盘及其上观者的运动)发生在闵氏时空,因此也属于狭义相对论范畴.分析这一问题的最清晰的工具仍然是4维几何语言,只是它比

---

① 你也许会以为图4-16(b)中的乙也做惯性运动,其实不然.该图把乙的世界线近似画成折线,在转折点 $p, r, q$ 上画成方向突变式的硬拐弯.物理过程通常是渐变的,严格说应该对这3处适当进行小范围的"磨光".磨光后的整条世界线当然不是测地线(虽然其中有两大段直线),所以乙仍做非惯性运动.但这3处磨光对线长的影响很小(而且"要多小有多小"),因此 $l_{甲}=\gamma l_{乙}$ 仍近似成立.

② 很多人听说过"等效原理"的一个常见提法,即"加速度与引力等效".如果他又知道"引力就是时空弯曲",便会推出"兄弟乙(加速观者)认为时空是弯曲的"这一错误结论.这一推理犯了"偷换概念"的逻辑错误."加速度与引力等效"一语中的"引力"只是一种假引力,它不由物质产生,不对应于时空弯曲,只因加速观者感到"好像置身于引力场中"而得名.而"引力就是时空弯曲"一语中的"引力"却是物质产生的真引力.真假引力不分是讲解等效原理时的常见病.详见§6.3.

双子问题更复杂,详见文献[7].

非惯性运动的一个更为常用的同义语就是加速运动,所以你更常听说的结论是"有加速度的兄弟较年轻".这一提法固然不错,但对加速度一词应当小心.谁都知道加速度是相对于参考系而言的,对地面系来说,甲为静止而乙有加速度.但是,相对于与乙固连的参考系,则乙为静止而甲有加速度.根据"有加速度的兄弟较年轻"的提法,现在岂非又得出甲较年轻的结论?悖论之说岂非又死灰复燃?我们的回答是:物理学家早已自觉或不自觉地形成一种习惯,凡提到加速度而又不说明所相对的参考系时,都默认相对于惯性系而言.只有在这种默契下,加速运动才是非惯性运动的同义语,"有加速度的兄弟较年轻"的提法才正确.我们在§3.3已经讲过4维表述优于3维表述,不妨认为现在又添加了一个例证.非惯性运动的提法是指世界线为非测地线,属于4维表述;加速运动的提法则由于加速度依赖于参考系而属于3维表述,只有补上"相对于惯性系"的默契才是明确且正确的.但是加上这一补充自然就有拖泥带水之感;而非惯性运动的提法则简练自足,无任何误解之虞.与此类似的是电动力学中关于"电荷只当做加速运动时才有辐射"的结论,在记住这一结论的同时也必须记住"加速度是指相对于惯性系"的默契.然而,"电荷只当做非惯性运动才有辐射"的提法则简练自足.

虽然用世界线长(图4-16)能够如此简单地把双子效应讲得一清二楚,但是,时至今日,几何语言仍然远未真正普及到每个相对论工作者和学习者,于是关于这一佯谬的文章在各种杂志上依然屡见不鲜,层出不穷,数不胜数.英国相对论学家**伦德勒**(Rindler)在他的书中有一段话(见文献[8])对这种情况给出了有趣的挖苦性描述:

"……(双子)悖论很易解决,但它那种令人激动的特殊魅力使争论一代接一代地经历着这样的循环:起先感到困惑不解,继而由于有所领悟(有时是误解)而洋洋自得,并且迫不及待地写成文字发表,仿佛此前无人懂过.在这方面发表的文章简直不可胜数,然而它们共同的有用部分至多不过填满几页纸而已."

## [选读4-4]

自1905年以来,有关双子问题的文献浩如烟海.在结论正确的文献中,绝大多数都只讨论图4-16(b)那种最简单情况,并通过具体计算乙所经历的固有时间来证实它比甲经历的时间短.(计算方法五花八门,有的还非常复杂.)这在原则上是对的,不过既然上面对图4-16(a)的简单分析已就最一般情况证明了 $l_乙 < l_甲$,是不是就不必再对具体曲线做计算了?退一步说,若要对图4-16(b)做计算,只要记住固有时间等于线长,用水平线(图中虚线)把甲、乙线都等分为两部分,由横竖三角形关系便知 $l_甲 = \gamma l_乙$.这与各种其他计算方法相较不是简单得多吗?有一种对图4-16(b)的算法也许值得一提,因为它在新、旧文献中颇为多见(例如文献[9];文献[10]),而且其中有一问题需要澄清.这一算法的4维"译文"如下:(意思都是原作者的,只不过改成4维表述,3维表述太难懂.)设K′和K″分别是直线段 $pr$ 和 $rq$ 相应的惯性系,Σ′和Σ″分别是K′和K″系过 $r$ 点的同时线(图4-17).当乙处在 $pr$ 段时,他认为事件 $m$ 与 $r$ 同时,故在自己经历 $pr$ 段的过程中甲经历的时间只有 $l_{pm}$(短于 $l_{pr}$).另一方面,乙在 $rq$ 段中又认为 $n$ 与 $r$ 同时,故在自己经历 $rq$ 段的过程中甲经历的时间只有 $l_{nq}$(短于 $l_{rq}$).原文指出,最重要的是,乙在 $r$ 点前后因同时线的突变而觉得甲的年龄有 $l_{mn}$ 的突变量.因此,根据乙的观察,

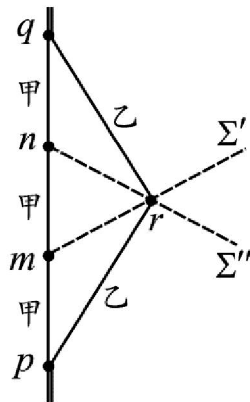



图4-17 把甲线分段相加

$$甲在\ p,q\ 之间的年龄增量 = l_{pm} + l_{mn} + l_{nq},$$

$$乙在\ p,q\ 之间的年龄增量 = l_{pr} + l_{rq}.$$

由于用3维语言(当然也没画时空图),原文只好利用钟慢效应等公式逐段计算,再把结果代入上两式,最后得到

$$甲在\ p,q\ 之间的年龄增量 = \gamma \times 乙在\ p,q\ 之间的年龄增量.$$

这一结果无疑正确,因为,从4维角度看,它无非就是把甲线分为三段并把线长逐一相加而已.然而,除去麻烦之外,这种算法还存在一个概念性问题,关键在于乙对甲的"观察"和"认为"在物理上无法实现.正如小节4.2.3所强调的,

讨论钟慢效应时除 2 个钟 $C_1$ 和 C′外还必须有第 3 个钟 $C_2$，而现在偏偏缺少第 3 个钟. 作为局外人，我们可以指着时空图说乙在 $pr$ 段时认为事件 $m$ 与 $r$ 同时，因此应该比较甲钟在 $m$ 和乙钟在 $r$ 的读数；但是，作为局中人的乙却无从知道甲钟在 $m$ 的读数，因为他无法观察（感知）到甲线上的信息. 如果你还坚持说可以，那么有一篇文章（文献 [11]）会对你发难. 该文指出，接受上述讲法将会导致“返老还童”的离奇推论，其 4 维“译文”如下. 设乙的世界线如图 4－18 所示，则乙在接近 $r$ 时将根据同时线 $\Sigma'$ 认为甲的年龄为 $l_{pm}$（约定甲在 $p$ 时年龄为零），刚离开 $r$ 后根据同时线 $\Sigma''$ 又认为甲的年龄为 $l_{pn}$（$< l_{pm}$），于是乙在 $r$（掉头）的瞬间观察到甲返老还童. 对此返老还童之说你有何评论？其实关键问题仍在于乙对甲的“观察”和“认为”在物理上无法实现. 乙从甲获得任何信息的必要条件是甲向乙发出光波或其他信号，而由图 4－19 可知甲线上任意两个事件（如 $e_1$ 和 $e_2$）的先后顺序在经过光子世界线传到乙线后（为 $f_1$ 和 $f_2$）都被保持，乙决不会看到返老还童现象. 不过，如果甲先在 $n$ 点向乙发出声信号再在 $m$ 点向乙发出光信号，则由图 4－20 可知乙先看见甲在 $m$ 点的形象（一个老人）后听见甲在 $n$ 点发来的声音（甲刚出生时的啼哭声）. 在某种意义上可以把这说成“乙感到甲有返老还童现象”，但这在原则上并无不可，它不过是“先看到闪电后听见雷声”这一人所共知现象的一个合理发展而已. 再退一步说，如果坚持把乙在每一时刻 $t_乙$ 的同时线与甲线的交点定义为“乙认为的、甲在 $t_乙$ 时刻的年龄”，那么这个“年龄”已没有通常年龄的意义，用它陈述的结论可以稀奇古怪（包括返老还童），但无伤任何物理实质.

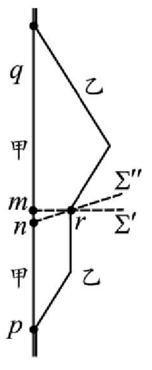



图 4－18　返老还童?

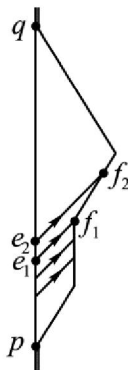



图 4－19　事件顺序不因用光传播而变

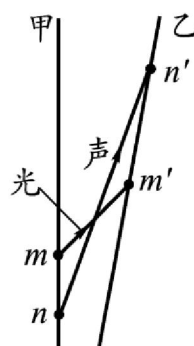



图 4－20　乙先见到老人后听到他出生时的啼哭声

[选读 4－4 完]

（第四讲未完，待续）

（上接 60 页）

[3]　吴崇试. 数学物理方法 [M]. 北京：北京大学出版社，1999：141-143.

[4]　彭芳麟. 计算物理基础 [M]. 北京：高等教育出版社，2010：349-363.

[5]　章礼华. 朱德权，王其申. 等腰直角三角形膜的横振动方程的一个解析解 [J]. 大学物理，2012，31(7)：31-33.

## Analytical solution of the eigenvalue problem in isosceles right triangle zero via analytic continuation

ZHANG Li-hua，ZHU De-quan，WANG Qi-shen

（School of Physics and Electric Engineering，Anqing Teachers College，Anqing，Anhui 246011，China）

**Abstract**: By discussing on the symmetrical solution or antisymmetrical solution on the square，we obtain the analytical solution of the eigenvalue problem in the isosceles right triangle zero with fixed or free boundary condition on hypotenuse via analytic continuation.

**Key words**: isosceles right triangle；eigenvalue problem；analytical solution

《从零学相对论》连载

# 《从零学相对论》连载⑩

梁灿彬[1]，曹周键[2]
(1. 北京师范大学 物理系，北京 100875；2. 中科院 应用数学所，北京 100190)

**4.3.4** 双子效应的实验验证

事实胜于雄辩. 双子问题的长期理论争辩呼唤着实验事实的发言. 然而载人星际旅行谈何容易！单是造成可观测的年龄差异所需要的高速目前就无望解决，更何况还有人的生理限制等各种实际问题. 注意到原子钟测量精度的不断提高，自然想到以钟代人，以飞机代飞船. 普通飞机环球一周造成的时间差虽然只有 $10^{-7}$ s 的量级，却已可被当时的原子钟精确地测量. 于是 Hafele 和 Keating 就在 1971 年借助于商用飞机进行了带钟环球飞行实验，并得出了与理论符合的结果，特别是证实了飞行钟与地面钟经历的时间的确有所不同（见文献 [12]）. 然而，实验与理论研究毕竟存在很大差别：理论研究可以约定若干简化前提，而实验则必须真刀真枪地操作. 例如，对双子问题做理论讨论时可以忽略地球引力场并认为地球是惯性系，而实验面对的却是真实的地球，应该充分考虑地球的各种实际情况带来的影响，再通过量级估算决定哪些影响非修正不可. 估算表明必须计及的是两大因素，即地球的自转（因而不是惯性系）和地球的引力（因而要用广义相对论）. 为便于理解，先讨论如下的半理想化环球飞行问题. 赤道上某实验室有两个已同步的铯原子钟 $\hat{C}$ 和 $C_0$. 钟 $\hat{C}$ 随着飞机以 1 600 km/h 的速率向西飞行，环球一周后返回实验室与钟 $C_0$ 重逢，试判断两钟读数孰大孰小，并求出读数差. 也许你会不假思索地说："$\hat{C}$ 钟读数较小，因为它外出做非惯性运动." 但这个答案不对. 实验涉及的是个有自转的地球，想象一个惯性观者从北极上空俯视地球（图 4-21），则实验室的 $C_0$ 钟随着地球的自转而（从西向东地）做匀速圆周运动，因而不是惯性运动. 反之，地球自转使赤道各点都以 1 600 km/h 的线速率向东运动，以同样速率向西飞行的运动恰好与地球自转相抵消，所以飞机（因而 $\hat{C}$ 钟）做惯性运动. 两钟的世界线如图 4-22 所示. 下面计算两钟的读数差. 不失一般性，令两钟在分手时（事件 $p$）都指零，重逢时（事件 $q$）读数分别为 $\hat{\tau}$ 和 $\tau_0$. 暂时忽略地球的引力场，即认为地球附近有平直时空. 为便于定量计算，以下的公式都采用国际单位制.

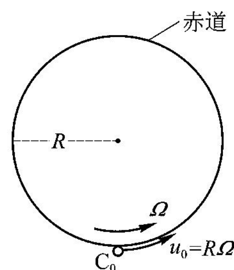



图 4-21 从北极上空俯视地球. $C_0$ 不是惯性钟

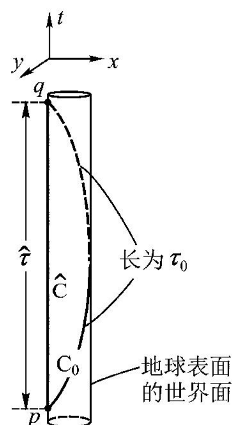



图 4-22 飞机上的钟 $\hat{C}$ 才是惯性钟

把地球看作惯性质点，以 $K\equiv\{t,x,y,z\}$ 代表地球所在的惯性系（其 $x,y,z$ 轴不随地球自转而转动），引入与之相应的球坐标系 $\{t,r,\theta,\varphi\}$，则闵氏线元在国际单位制中取如下形式：

$$\begin{aligned}ds^2&=-c^2dt^2+dx^2+dy^2+dz^2\\&=-c^2dt^2+dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2).\qquad(4\text{-}3\text{-}1)\end{aligned}$$

以 $\Omega$ 和 $R$ 分别代表地球的自转角速率和赤道半径，把上式用于 $C_0$ 线的任一元段，注意到赤道上有 $r=R$，$dr=0$，$\theta=\pi/2$，$d\theta=0$ 及 $d\varphi=\Omega dt$，得

$$\begin{aligned}ds^2&=-c^2dt^2+R^2d\varphi^2=-c^2dt^2+R^2\Omega^2dt^2\\&=-[1-(R^2\Omega^2/c^2)]c^2dt^2.\qquad(4\text{-}3\text{-}2)\end{aligned}$$

再以 $u_0$ 代表赤道任一点（相对于惯性系 K）的线速率，则 $u_0=R\Omega$，故

$$ds^2=-[1-(u_0^2/c^2)]c^2dt^2.\qquad(4\text{-}3\text{-}3)$$

以前熟悉的几何单位制公式 $d\tau=\sqrt{-ds^2}$ 在国际单位制中的形式为 $d\tau=\sqrt{-ds^2/c^2}$，故由图 4-22 可知

$$\tau_0=\int_p^q\sqrt{-\frac{ds^2}{c^2}}=\int_0^{\hat{\tau}}\sqrt{1-\left(\frac{u_0}{c}\right)^2}\,dt=\hat{\tau}\sqrt{1-\left(\frac{u_0}{c}\right)^2}$$

$$=\gamma_0^{-1}\hat{\tau},\quad \gamma_0\equiv\frac{1}{\sqrt{1-(u_0/c)^2}}.\quad(4\text{-}3\text{-}4)$$

（其中第二步是因为我们取 $p$ 点的坐标时 $t_p=0$，从而 $t_q=\hat{\tau}$.）上式中的

$$u_0=\text{赤道线速率}=1\,600\ \text{km/h}=\frac{1\,600\times10^3\ \text{m}}{3\,600\ \text{s}}\approx444\ \text{m/s},$$

或者，用《中国大百科全书》P. 59 的更准确数据 $u_0=465$ m/s 求得

$$(u_0/c)^2=[465/(3\times10^8)]^2=2.4\times10^{-12},\quad(4\text{-}3\text{-}5)$$

既然 $(u_0/c)^2$ 如此小，就可把 $\gamma_0^{-1}=[1-(u_0/c)^2]^{1/2}$ 展开为泰勒级数并保留到二阶小项：

$$\gamma_0^{-1}=[1-(u_0/c)^2]^{1/2}\cong1-(u_0/c)^2/2,\quad(4\text{-}3\text{-}6)$$

代入式(4-3-4)给出

$$\tau_0=[1-(u_0/c)^2/2]\hat{\tau}.\quad(4\text{-}3\text{-}7)$$

由图 4-22 又知 $\hat{\tau}$ 等于地球自转一周的时间（24 小时），故　$\hat{\tau}=24\ \text{h}=24\times3\,600\ \text{s}=8.6\times10^4\text{s}$，

于是环球飞行一周所造成的时间差

$$\hat{\tau}-\tau_0=[(u_0/c)^2/2]\hat{\tau}$$
$$=(2.4\times10^{-12})\times(8.6\times10^4\text{s})/2\approx10^{-7}\text{s}.\quad(4\text{-}3\text{-}8)$$

以上只是半理想化环球飞行的理论结果. 在实际操作中，实验者携带原子钟搭乘商用飞机先后进行了东飞和西飞实验，情况比半理想化飞行更为复杂. 此外，飞行钟与地面钟位于地球表面附近的不同高度，根据广义相对论（详见小节 8. 3. 1），地球引力场还会给两钟的读数差提供一项不可忽略的影响. 实验者先从理论上考虑了所有不可忽略的影响并求得两钟读数差的理论预言值，然后再做实验，发现实验结果与理论预言值符合得很好. 详见选读 4-5.

[选读 **4-5**]

实验借助于商用飞机携带 4 只铯原子钟环球飞行了 2 次，第一次向东，第二次向西. 我们先就东飞和西飞问题做一讨论.

设飞机 C 在赤道上空以速度 $v$ 向东飞行（$v>0$ 代表真向东，$v<0$ 代表向西），则它相对于惯性系的速度（记作 $u$）为（如此低速下当然可用牛顿速度变换式）

$$u=R\Omega+v.\quad(4\text{-}3\text{-}9)$$

当 $v=0$ 和 $v=-R\Omega$ 时 $u=R\Omega=u_0$ 和 $u=0$，C 的世界线分别就是图 4-22 的 $C_0$ 线和 $\hat{C}$ 线. 无论 $v$ 取何值，只要飞机 C 在赤道上空飞行，由式(4-3-1)可知对 C 线的任一元段有

$$ds^2=-c^2dt^2+R^2d\varphi^2.\quad(4\text{-}3\text{-}10)$$

因 $d\varphi/dt$ 是飞机的角速率，故飞机的线速率 $u=Rd\varphi/dt$，代入上式得

$$ds^2=-c^2dt^2+u^2dt^2=-\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)c^2dt^2,\quad(4\text{-}3\text{-}11)$$

上式无非是用 $u$ 代替式(4-3-3)中的 $u_0$，所以，把 $C_0$ 线的环球时间表达式(4-3-7)的 $u_0$ 改为 $u$ 便得 C 线的环球时间（记作 $\tau$）：

$$\tau=[1-(u/c)^2/2]\hat{\tau}=[1-(R\Omega+v)^2/2c^2]\hat{\tau}.\quad(4\text{-}3\text{-}12)$$

当 $v=0$ 时还原为

$$\tau_0=[1-(R^2\Omega^2/2c^2)]\hat{\tau}=[1-(u_0/c)^2/2]\hat{\tau},\quad(4\text{-}3\text{-}7')$$

两式相减给出

$$\tau-\tau_0=-[(2R\Omega v+v^2)/2c^2]/\hat{\tau}.\quad(4\text{-}3\text{-}13)$$

上式除以式(4-3-7′)得

$$\frac{\tau-\tau_0}{\tau_0}=\frac{-(2R\Omega v+v^2)/2c^2}{1-(R^2\Omega^2/2c^2)}.\quad(4\text{-}3\text{-}14)$$

上式右边分母

$$1-(R^2\Omega^2/2c^2)=1-(u_0/c)^2/2\approx1-10^{-12}\approx1,$$

[其中第二步用到式(4-3-5).]所以式(4-3-14)可简化为

$$(\tau-\tau_0)/\tau_0\approx-(2R\Omega v+v^2)/2c^2,$$

于是　$$\tau-\tau_0=-(2R\Omega v+v^2)\tau_0/2c^2.\quad(4\text{-}3\text{-}15)$$

可见，当 $v>0$（东飞）时 $\tau<\tau_0$，即环球时间比地面惯性参考钟经历的时间短（“丢失时间”）；当 $v<0$（西飞）而且 $|v|\approx R\Omega$ 时 $\tau>\tau_0$，即环球时间比地面钟的时间长（“赢得时间”）.

除了地球有自转外，地球引力场也会带来可观测的影响. 飞机与地面的高度差造成引力势差，根据广义相对论，其影响体现为一个附加项，式(4-3-15)要改为　$$\tau-\tau_0=[2gh-(2R\Omega v+v^2)]\tau_0/2c^2.\quad(4\text{-}3\text{-}16)$$

其中 $h\ll R$ 是飞行高度，$g$ 是地面重力加速度（详细推证见第 8 讲选读 8-1）. 上式就是从狭义相对论和广义相对论出发求得的时间差. 在与实验数据对比之前还要考虑一系列实际情况，例如，出于经济考虑而采用商用飞机，而商用飞机并不在赤道正上空飞行，其纬度、高度和速度在飞行期间也不保持常数. 考虑所有这些因素后得到一个修正公式，由此可求得飞行钟与地面惯性参考钟的时间差的理论预言值：东飞钟为 $(40\pm23)\times10^{-9}$s，西飞钟为 $(275\pm21)\times10^{-9}$s.

实际飞行是在 1971 年 10 月进行的. 第一次为东

飞,持续时间为65.4 h,其中飞行时间是41.2 h;第二次(约一周后)为西飞,持续时间为80.3 h,其中飞行时间是48.6 h.与地面惯性参考钟的时间差的实验值如下:东飞钟为$(59\pm10)\times10^{-9}$s,西飞钟为$(273\pm7)\times10^{-9}$s.文献[12]的结尾说:

"无论如何,对于'经历闭合旅程后两钟读数是否相等'这一问题,看来已经没有进一步争论的余地,因为我们已经查明两钟读数的确不等."

[选读4-5完]

## §4.4 高速物体的视觉形象

稍懂相对论的人都知道"动尺收缩",于是容易产生如下误解:"如果列车在我的视野内高速飞驰,我看到的车长将比它的静长要短."事实上,这一误解与狭义相对论同时诞生,因为爱因斯坦在他的相对论奠基性论文《论运动物体的电动力学》(1905)一文§4开头中就有这样的陈述(见文献[13]):

"因此,在静止状态下测量为球状的刚体,当处于运动状态时,在静系看来就具有旋转椭球的形状,其三个轴(笔者注:似应为半轴)为$R\sqrt{1-v^2/c^2}$,$R$,$R$."①

从此开始,类似说法就不断出现在浩如烟海的作者的文字中.著名科学家兼科普作家盖莫夫②在他的著名科普著作《物理世界奇遇记》(科学出版社,1978年版第5页)中更是淋漓尽致地把这一误解推到了极致.书中描述主人公汤普金斯先生梦游一座奇特城市,市内的光速比$c$小很多.于是他看到骑车者连人带车都是扁的;当他自己骑车时,又看到被压扁了的街道、橱窗和行人.总之,上述误解统治着物理学界长达50余年,直至特列尔(Terrell)和彭罗斯(Penrose)于1959年分别载文澄清为止(见文献[14]和文献[15]).特列尔首次明确指出,这一误解起因于人们混淆了两个含义不同的词汇——"测量"和"看见".看见(seeing)是指观者用眼睛去看(或用相机拍照),其结果称为视觉形象,它由发自物体各点并同时到达眼睛的所有光子组成.由于各点与眼睛的距离未必相同,这些光子未必从各点同时发出.反之,测量(measurement)是指特意安排的一种操作,它要"测出"物体各点在同一时刻的位置,这些点组成的图像称为测量形象.所谓同一时刻,是指观者所在参考系的一张同时面.小节4.1.1讲过,尺缩效应是指尺子世界面与同时面(图4-1的$\Sigma'_0$)的交线(动尺)沿运动方向缩短.推而广之,任何运动物体在观者所在系的任一同时面上的图像都沿运动方向缩短.可见,运动物体的测量形象必有尺缩,但其视觉形象则有待慎重讨论.有趣的是,特列尔在慎重考虑后竟证明了如下的一般结论(见文献[14]);只要物体离观者足够远(物体对观者的张角足够小),高速物体的视觉形象就毫无尺缩,它无非是物体静止时的形象绕某轴转某角的结果.后人称此为特列尔转动.限于本书的既定范围,此处不能介绍这一有趣结论的证明,但将讨论两个特例,并讲清两例中的特列尔转动的原因、转轴和转角.

鉴于视觉形象与测量形象存在差别,讨论相对论时就要特别注意用词.通常的习惯是:"测得"或"认为"是指测量形象(或测量结果);"看到"或"看见"是指视觉形象.有时也使用"看来"一词,虽然有个"看"字,但与"测得"或"认为"同义.

**例1** 高速运动立方体的视觉形象

边长为$L$的立方体相对于惯性系K高速匀速运动,速度矢量$\boldsymbol{v}$平行于立方体的一条边,在图4-23中画成向右.该系的某观者从正下方很远处观看,这个"很远"保证从立方体发出并到达观者的光线为平行光.图4-23是立方体在K系的某时刻$t_2$的测量形象.如果$\boldsymbol{v}=0$,观者只能看到立方体的正面(对观者是正面,对图4-23是底面),即正方形ABCD.当$\boldsymbol{v}\neq0$时,由于尺缩,水平边长BC只有竖直边长的$\gamma^{-1}$倍,故正面ABCD的测量形象是压扁了的正方形.然而,$\boldsymbol{v}\neq0$还带来另一后果:由于E,F点比B,A点离观者较远,它们在$t_2$之前的时刻$t_1\equiv t_2-L/c$(那时它们位于量E′,F′)发出的光子将在$t_2$时刻到达正面,

图4-23 (测量形象)立方体向右运动,观者在正下方很远处观看

① 原文接着说"于是球(因而无论任何形状的刚体也一样)在$Y$,$Z$方向上的尺寸,看来不因运动而有所改变,但$X$的尺寸看来则按$1:\sqrt{1-v^2/c^2}$的比率缩短了,即$v$值愈大,收缩愈厉害.当$v=c$时,从'静'系统看来,一切运动物体都收缩成扁平形状了."

② 盖莫夫是"大爆炸宇宙论"的主要创始人之一.

并与正面各点在 $t_2$ 时刻所发光子同时到达观者,形成视觉形象. 类似的思考也适用于侧面 ABEF 的任一点(例如侧面中点 M 在时刻 $t_2-L/2c$ 所发光子对视觉形象也有贡献),于是视觉形象如图 4-24 的下图,正面 ABCD 虽因尺缩而被压扁,但由于侧面 ABEF 的贡献,整个视觉形象在横向还有所“拉长”. 其实这正是特列尔转动的后果——远方观者观看立方体所得的视觉形象相似于静止立方体转了角度 $\beta$(图 4-24 上图). 由图可知 $\beta$ 满足

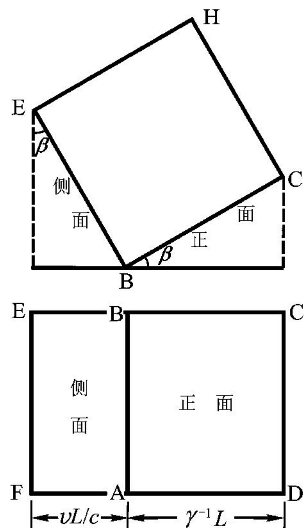



图 4-24　下图:运动立方体的视觉形象,
上图:静止立方体绕 AB 轴转 $\beta$ 角

$$\sin\beta=(vL/c)/L=v/c. \qquad (4\text{-}4\text{-}1)$$

就是说,远方观者看到的图像相当于把静止立方体绕 AB 轴转角度 $\beta$ 所得的图像.

注 **4**　绘制图 4-23、20 时取 $v=0.5c$,因而 $\gamma^{-1}\equiv\sqrt{1-(v/c)^2}=\sqrt{3}/2\approx0.866$.

例 **2**　高速运动球体的视觉形象

把例 1 的立方体换成半径为 $R$ 的球体,其他条件不变. 想象地将球体切成许多薄片,各片平行于 $\boldsymbol{v}$ 和视线决定的平面(图 4-25 的纸面). 把每片看作一个半径为 $r\leqslant R$ 的圆盘,由于观者的视线平行于这个圆盘(“从盘边看盘”),看到的是一段直线. 如果 $\boldsymbol{v}=0$(球体静止),观者能看到下半个圆周(图 4-25 的 A 和 B 是两个“擦边可见点”),表现为一段直线 $\alpha\beta$,长为 $2r$. 因为球体由许多圆盘组成(最大半径为 $R$),所以观者看 $\boldsymbol{v}=0$ 的球体所得的轮廓是半径为 $R$ 的圆周. 当 $\boldsymbol{v}\neq0$ 时,圆盘的测量形象应有尺缩,其周边成为椭圆,长半轴长为 $r$,短半轴长为 $\gamma^{-1}r$(图 4-26),椭圆方程为

$$\frac{x^2}{\gamma^{-2}r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1,\quad 即\quad \gamma^2x^2+y^2=r^2. \qquad (4\text{-}4\text{-}2)$$

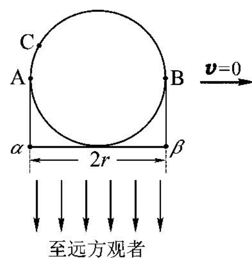



图 4-25　$\boldsymbol{v}=0$ 时薄片的测量形象为圆形,半径为 $r(\leqslant R)$. A,B 为擦边可见点

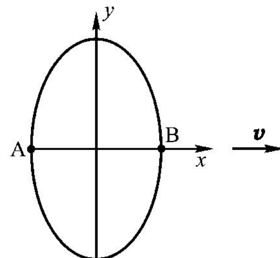



图 4-26　$\boldsymbol{v}\neq0$ 时的测量形象

现在要证明观者看运动圆盘所得的视觉形象仍是长为 $2r$ 的直线段(没有尺缩). 从测量形象(图 4-26)如何求得视觉形象? 关键是运动圆盘的擦边可见点与静止圆盘(图 4-25)不同. 图 4-25 的 A 点之所以是左擦边点,是因为上半圆周的任一点 C 向下所发光子都被圆盘自身遮挡住. 然而,当 $\boldsymbol{v}\neq0$ 时圆盘向右高速平动,只要 C 点比 A 点高得不多,圆盘的右移就会给从 C 向下发出的光子让路,所以左擦边点将沿椭圆适当上移至某点 A′(图 4-27). 另一方面,图 4-26 的 B 点向下所发光子在 $\boldsymbol{v}\neq0$ 时将被右移过来的圆盘遮挡,所以右擦边点将沿椭圆下移至某点 B′.

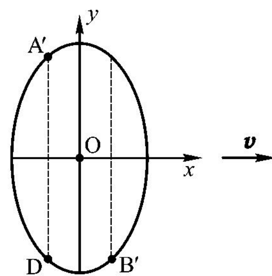



图 4-27　A′,B′为擦边可见点
(取 $v=0.8c$,因而 $\gamma^{-1}\approx0.6,\gamma\approx1.67$)

设图 4-27 的 A′在某时刻 $t_1$ 所发光子在某一瞬刻到达观者 G,发光事件记作 $p_1=(t_1,\mathrm{A}')$. 令 $\Delta t\equiv\mathrm{A}'\mathrm{D}/c$,设 O 是椭圆中心,在过 O 的水平线上取 $\hat{\mathrm{O}}$ 点使 $\mathrm{O}\hat{\mathrm{O}}=v\Delta t$,则圆盘在时刻 $t_2=t_1+\Delta t$ 将到达以 $\hat{\mathrm{O}}$ 为心的新椭圆(图 4-28). 以 B′代表新椭圆的右擦边可见点,考虑另一发光事件 $p_2=(t_2,\mathrm{B}')$,则事件 $p_1,p_2$ 发出的光子将同时到达图 4-28 的水平直线段 $\alpha'\beta'$. 由于此直线段上各点与观者距离相等,观者看到的就是一段直线 $\alpha'\beta'$,下面证明其长度恰为 $2r$. 关键是要确

定擦边点 A′和 B′. 为此,设椭圆盘在无限小时间 $\mathrm{d}t$ 内从图 4-29 的实线移到虚线. 过 A′作竖直线交虚椭圆于 $\tilde{Q}$,过 $\tilde{Q}$ 作水平线交实椭圆于 Q. 作为擦边点,A′满足如下要求:A′向下所发光子恰好在 $\mathrm{d}t$ 时间内到达虚椭圆($\tilde{Q}$ 点),$\tilde{Q}$ 点因向右运动而给它让路. 问:该光子从 $\tilde{Q}$ 继续往下走时会不会被虚椭圆所挡? 答:不会,因为"A′是擦边可见点"意味着实椭圆弧 $\widehat{AA'}$ 的每点都是可见点,而 $\tilde{Q}$ 点无非是 Q 点在虚椭圆的体现,自然是虚椭圆的可见点. 不妨把从 $\tilde{Q}$ 继续往下走的光子看作 $\tilde{Q}$ 所发的光子,它当然不会被虚椭圆所挡. 可见擦边点 A′满足下式($\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 含义见图 4-29):

$$\mathrm{d}x=v\mathrm{d}t,\mathrm{d}y=c\mathrm{d}t,\text{即}\quad \mathrm{d}x/\mathrm{d}y=v/c. \qquad (4\text{-}4\text{-}3)$$

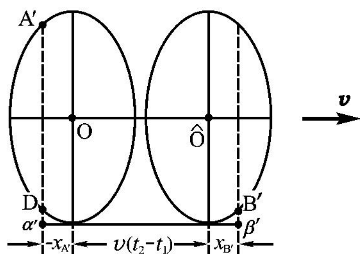



图 4-28 A′在 $t_1$ 时刻所发光子(记作 $\gamma_1$)在 $t_2=t_1+\Delta t$ 时到 D,此时椭圆心恰好移至 Ô,故 B′在 $t_2$ 时所发光子与 $\gamma_1$ 同时到达 $\alpha'\beta'$ 线

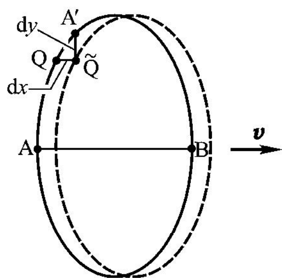



图 4-29 左擦边可见点 A′的确定

再注意到① N 和 Q 都是实椭圆的点;② $\mathrm{d}t$ 代表无限小时间,就可通过对椭圆方程(4-4-2)求微分得到

$$y/x=-\gamma^2\mathrm{d}x/\mathrm{d}y=-\gamma^2 v/c. \qquad (4\text{-}4\text{-}4)$$

作为左擦边点,A′的坐标 $x_{A'}$ 和 $y_{A'}$ 应满足上式:

$$y_{A'}/x_{A'}=-\gamma^2 v/c. \qquad (4\text{-}4\text{-}5)$$

作为椭圆的点,A′的坐标又应满足椭圆方程(4-4-2),故

$$r^2=\gamma^2 x_{A'}^2+y_{A'}^2. \qquad (4\text{-}4\text{-}6)$$

以式(4-4-5)代入上式,略加运算得

$$r^2=\gamma^4 x_{A'}^2,$$

故

$$x_{A'}=-\frac{r}{\gamma^2},\quad y_{A'}=-\gamma^2\frac{v}{c}\left(-\frac{r}{\gamma^2}\right)=\frac{v}{c}r. \qquad (4\text{-}4\text{-}7)$$

同理还有

$$x_{B'}=r/\gamma^2,\quad y_{B'}=-(v/c)r. \qquad (4\text{-}4\text{-}8)$$

现在就可计算 $\alpha'\beta'$ 的长度. 由图 4-28 知

$$\alpha'\beta'=-x_{A'}+v(t_2-t_1)+x_{B'}. \qquad (4\text{-}4\text{-}9)$$

因为 $t_2-t_1$ 是光子从 A′到 D 的时间,所以

$$t_2-t_1=(y_{A'}-y_{B'})/c=2vr/c^2. \qquad (4\text{-}4\text{-}10)$$

将式(4-4-10)、(4-4-7)、(4-4-8)代入式(4-4-9),经简单运算得

$$\alpha'\beta'=r/\gamma^2+2r(v/c)^2+r/\gamma^2=2r.$$

这就是所要证明的. 由于被观测球体由许多圆盘组成(最大半径为 $R$),所以在 $\boldsymbol{v}\neq 0$ 时观者看到的轮廓与 $\boldsymbol{v}=0$ 时的轮廓一样,都是半径为 $R$ 的圆周. 然而两者仍有一个区别:由图 4-28 可知 $\alpha'$ 和 $\beta'$ 分别对应于 A′和 B′,所以在 $\boldsymbol{v}\neq 0$ 时看到的不是下半圆周 $\widehat{AB}$ 而是图 4-30 的左下半圆周 $\widehat{A'AB'}$(粗线). 就是说,当球体运动时,其视觉形象仍是球体(看不到尺缩),但却是转过 $\beta$ 角后的球体,由图 4-30 可知 $\beta$ 满足

$$\sin\beta=y_{A'}/R=v/c, \qquad (4\text{-}4\text{-}11)$$

其中末步用到式(4-4-7)(改 $r$ 为 $R$). 这正是球体情况下的特列尔转动.

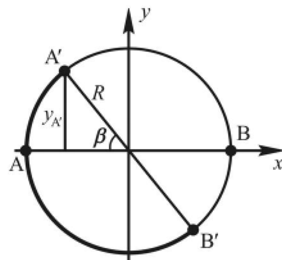



图 4-30 观者看到的是转了 $\beta$ 角的半圆周 $\widehat{A'AB'}$(粗线)

上述两例都只讨论了最简单的情况——观者的视线垂直于物体的运动方向. 更一般的讨论将涉及视线与运动方向成任意角的情形. 虽然讨论更为复杂,但特列尔转动的结论仍然成立:只要张角足够小,高速物体的视觉形象就相似于静止物体转过一个角度. 然而,如果张角不很小,可以预期,物体的不同部分会有不同的转角,因此物体的整体视觉形象将有畸变. 不过也有例外:对运动球体而言,无论张角有多大(无论在多么近的地方观看),其视觉形象总是球形.

这是彭罗斯(文献[15])证明的,我们将在选读 4-6 中介绍用时空图对此的证明.

高速物体的视觉形象是一个非常复杂的课题. 上面讨论的轮廓问题只是它的一个主要方面,此外还有两个效应:① 物体亮度的角分布会因运动而改变(例如,从各向同性改为像汽车头灯那样发出聚集在一个小立体角内的光线);② 由多普勒频移带来的颜色改变. 这些方面的文献很多,我们只推荐一篇入门读物——文献[16].

电脑模拟是研究高速物体视觉形象的有力工具. 这一工作始于 20 世纪 80 年代末期,现在国际上已有多个小组进行研究. 以接近光速的高速开车在日常生活中是不可能的,因此,盖莫夫只能让他的主人公梦游光速很低的奇特城市. 但是电脑使得“接近光速开车拍摄”成为可能,摄得的彩色录像并非科幻作品,惟一带有“科幻味道”的只是把光速降得很低(例如 $c=5$ m/s). 改变光速不过是对时空尺度的某种重新标度化,并不改变物理,所以拍得的录像在物理上是正确的. 从录像和照片不但可以看出物体的形状,而且可以看到由多普勒频移导致的颜色改变. 图 4-31 示出其中的一张照片. 现在有多个国外网站介绍这方面的成果,除了照片和录像之外,你还可以亲自设定有关参数进行实时演练. 有兴趣的读者可以查看下列网站:

① http://www. anu. edu au/Physics/Searle,
② http://www. anu. edu au/Physics/Savage/TEE/,
③ http://www. vis. uni-stuttgart. De/relativity/,
④ http://www. spacetimetravel. Org/,
⑤ http://www. . adamauton. Com/warp/.



(a) “照相机”与街道相对静止



(b) “照相机”以接近光速的速率相对于街道运动

图 4-31　以接近光速的速率开车? 这种在日常生活中不可能的事情可以用电脑模拟来做. 本图是德国图宾根(Tubingen)市中心的照片. 由于不满足张角很小的条件,下图有很大畸变

(第四讲未完,待续)

(上接 56 页)

# Study of source property and its role in light interference

GU Zheng-tian, PU Sheng-li, TONG Yuan-wei

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

**Abstract**: Centering on interfere condition of the light, the paper analysis the property of light source and realization method of light interference and discusses the influence of light source on interference fringe disttrtion and quality. In the optics teaching, it is essential to emphasis on the influence of source on the coherence property, which will enable students to deepen understanding the phenomenon and essence of light interference.

**Key words**: light interference; polarized properties; Gaussian beam; parallel beam; spatial coherence; temporal coherence

《从零学相对论》连载

# 《从零学相对论》连载⑪

梁灿彬[1]，曹周键[2]

(1. 北京师范大学 物理系，北京 100875；2. 中科院 应用数学所，北京 100190)

**[选读4-6]**

本选读借用时空图证明如下结论：无论视角大小，高速运动球体的视觉形象总是球形（轮廓为圆周）．用时空图讨论高速物体视觉形象的文献极为罕见，我们能找到的仅有一篇（文献[15]）中的一小段．以下内容主要是笔者钻研的结果．讨论采用几何单位制，其中光速 $c=1$，所以光锥面是45°圆锥面．为便于讲解，我们讨论两个问题：

**问题1** 与球体相对静止的观者G看到什么？

**问题2** 与球体相对运动的观者G′看到什么？

问题1很简单，答案自然是球形（轮廓是圆周）．但是为了用时空语言找出问题2的答案，最好先用时空图讲清问题1中G看到圆周的道理．这一讲解虽然稍费笔墨，但一经掌握，看似复杂的问题2马上迎刃而解．

以G为心作任意半径的球面，并称之为G的一个"天球面"，简称**天球**．任何光子在到达G前必定穿过天球，因而留下印记．由于天球各点与G距离相等，所有光子在天球上的印记便构成视觉形象．

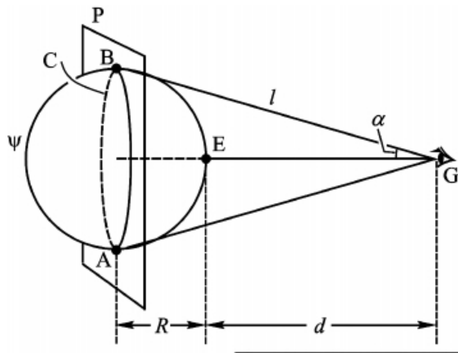



图4-32（空间图） 观者G与球面ψ相对静止，他看到的轮廓是圆周C

以ψ代表被看球体的表面（2维球面）．为便于同稍后的时空图对比，约定G在球的右侧（而不再是下侧）观看，如图4-32．由于球体不透明，球面ψ的左半部分被右半部分挡住，对视觉形象有贡献的只有右半个球面，记作$\psi_{右}$①．选球体所在的惯性系K为基准系画时空图（图4-33），则球面ψ的世界面（仍记作ψ）是竖直圆柱面（这是压缩一维的结果），观者G的世界线是竖直线．在G线上任取一点 $o$ 作为观测瞬刻，则在此瞬刻到达G的光子构成视觉形象，这些光子的世界线必定躺在 $o$ 点的过去光锥面（记作$\mathscr{C}$）上．圆柱面ψ上每点都代表一个发光事件，所发光子的世界线都是指向未来的类光测地线（45°斜直线），但只有进入 $o$ 点（因而躺在$\mathscr{C}$上）的那些线才对视觉形象有贡献．有贡献的类光测地线称为**有用光线**．类光测地线是有用光线当且仅当它从$\psi_{右}$与$\mathscr{C}$的交集（记作$\psi_{右}\cap\mathscr{C}$）发出．交集$\psi_{右}\cap\mathscr{C}$的边界点发出的有用光线称为**边缘光线**，它们组成**边缘光线集**，视觉形象的轮廓就由边缘光线集决定．图4-33示出3条有用光线（点划线）——$a_1o$，$b_1o$和$e_2o$，分别从图4-32的A，B和E点发出，$a_1o$和$b_1o$还是边缘光线．以$t_0$代表事件 $o$ 在K系的时间坐标，则A，B点在时刻 $t_1\equiv t_0-l/c$ 发出的光子恰在 $t_0$ 时刻到达G，发光事件为 $a_1=(t_1,\mathrm{A})$ 及 $b_1=(t_1,\mathrm{B})$，收光事件为 $o=(t_0,\mathrm{G})$．事件 $a_1$，$b_1$ 对K系是同时事件，所以在时空图中位于 $t_1$ 时刻的同时面 $\Sigma_1$ 上．E点在较晚时刻 $t_2\equiv t_0-d/c>t_1$ 发出的光子也在 $t_0$ 时刻到达G，所以发光事件 $e_2=(t_2,\mathrm{E})$ 位于较晚的同时面 $\Sigma_2$ 上．以 $w$ 代表圆周C所发光子的速度的水平分量，则 $w=c\cos\alpha$（图4-32）．以P代表圆周C所在平面（仍见图4-32），想象P从时刻 $t_1$ 开始以速率 $w$ 向观者G匀速平移，则圆周C在时刻 $t_1$ 所发光子都与平面P"齐步走"，就是说，无论P走到哪里（例如走到图4-34的虚线处），光子总在P上．因此，若以$\mathscr{P}$代表平面P的世界面（是个3维平面，但在图4-35中只能画成2维平面），则边缘光子的世界线必定躺在$\mathscr{P}$上．另一方面，这些世界线是类光测地线，当然也躺在光锥面$\mathscr{C}$上，所以

$$\text{边缘光线集}=\mathscr{P}\cap\mathscr{C}.\ (\text{见图4-35}) \qquad (4-4-12)$$

① 当观者与球的距离不够远时，$\psi_{右}$应理解为右边小半个球面．

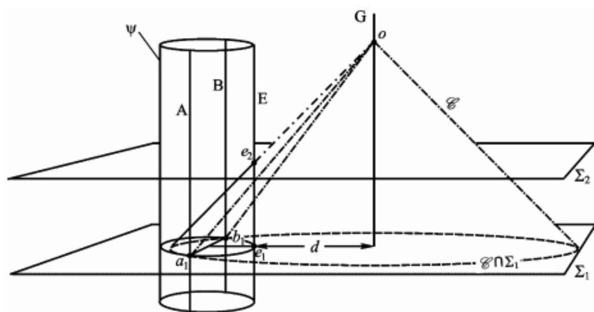



图4-33 观者G与球面ψ相对静止的时空图. $a_1o$,$b_1o$和$e_2o$是3条有用光线

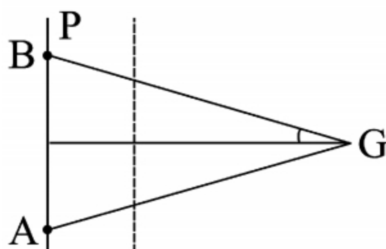



图4-34 A点所发光子与平面P"齐步走"

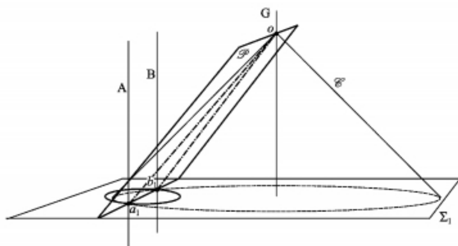



图4-35 边缘光线集$=\mathscr{P}\cap\mathscr{C}$. 由于压缩一维,图中只能显示两条边缘光线,即$a_1o$和$b_1o$

光锥面$\mathscr{C}$与同时面$\Sigma_1$的交集$\mathscr{C}\cap\Sigma_1$是个2维球面(但在图4-35中画成1维圆周),不妨取作G在$t_1$时刻的天球.由于所有边缘光线在天球上的印记构成视觉形象的轮廓,所以

G看到的视觉形象(轮廓)=G的天球∩边缘光线集

$$=(\mathscr{C}\cap\Sigma_1)\cap(\mathscr{P}\cap\mathscr{C})=(\mathscr{C}\cap\Sigma_1)\cap\mathscr{P}. \tag{4-4-13}$$

因为$\mathscr{C}\cap\Sigma_1$是2维球面(图4-35中画成1维圆周),而$\mathscr{P}$是3维平面(图中画成2维平面),所以$\mathscr{C}\cap\Sigma_1$与$\mathscr{P}$的交集$(\mathscr{C}\cap\Sigma_1)\cap\mathscr{P}$是1维圆周(图中画成两个点$a_1$,$b_1$),可见问题1的答案是

G看到的视觉形象(轮廓)=1维圆周.

这个答案是不证自明的,之所以要花费如此篇幅,是因为它给问题2的回答做了极好的铺垫.问题2是:与球相对运动的观者G′看到什么?选读前(例2)的讨论是站在观者的立场上,认为球在运动.现在用时空图讨论,不如站在球的立场上,认为球静止而观者G′运动(可沿任何方向以任何速率$v<1$运动).就是说,仍以球体所在惯性系K为基准画时空图,只是用运动观者G′代替静止观者G.在这一时空图中,球面ψ的世界面仍是竖直圆柱面(仍是静止球面),但运动观者G′的世界线要画成斜直线.设G′与G的世界线交于$o$点(只须在图4-33中补画一条过$o$点的斜直线),这意味着G′与G相遇于事件$o$,两人都在事件$o$看到球面ψ的视觉形象,只是G′认为这是运动球面的形象.无论是G还是G′,由于共用事件$o$,对视觉形象轮廓造成贡献的是同一个(绝对的)边缘光线集$\mathscr{P}\cap\mathscr{C}$[①],集合里的光线由圆周C上各点在时刻$t_1\equiv t_0-l/c$(K系的时间坐标)同时发出(不过对G′所在系K′而言一般就不同时).于是仿照前面的讨论可知

G′看到的视觉形象轮廓=G′的天球∩边缘光线集=G′的天球$\cap(\mathscr{P}\cap\mathscr{C})$.

这无非是将式(4-4-13)中G的天球换成G′的天球.观者G可取同时面$\Sigma_1$与$\mathscr{C}$的交集为天球,观者G′则应取他所在系K′的某张同时面$\Sigma_1'$与$\mathscr{C}$的交集为天球.既然G′线是斜直线,同时面$\Sigma_1'$就是斜置平面(是3维平面压缩一维的结果).于是

$$\text{G′看到的视觉形象(轮廓)}=(\mathscr{C}\cap\Sigma_1')\cap(\mathscr{P}\cap\mathscr{C})=(\mathscr{C}\cap\Sigma_1')\cap\mathscr{P}. \tag{4-4-14}$$

这会带来什么不同?先降一维讨论,并暂时按3维欧氏几何考虑.这时$\mathscr{C}\cap\Sigma_1$是2维圆锥面$\mathscr{C}$与2维平面$\Sigma_1$的交集,而且$\Sigma_1$垂直于锥面$\mathscr{C}$的轴,所以交集$\mathscr{C}\cap\Sigma_1$是圆周.然而平面$\Sigma_1'$不垂直于锥面$\mathscr{C}$的轴,故$\mathscr{C}\cap\Sigma_1'$是椭圆而不是圆周.这似乎就出问题.然而时空图涉及的是闵氏(而不是欧氏)几何(这是关键!),其特点是光锥面在坐标变换下形状不变(光锥面是纯几何对象),就是说,在以K′为基准系的时空图中,光锥面与图4-33的完全一样,但G′的世界线是竖直线,同时面$\Sigma_1'$是水平面,由此便知$\mathscr{C}\cap\Sigma_1'$同样是圆周(补上一维就是2维球面),于是$(\mathscr{C}\cap\Sigma_1')\cap\mathscr{P}$同样是两个点($a_1'$和$b_1'$),补上一维

① 虽然在引入$\mathscr{P}$时借用过观者G(及图4-32),但一经引入,$\mathscr{P}$就是4维时空中的一个3维平面,其关键好处就是用它与光锥面$\mathscr{C}$的交集来确定边缘光线集(边缘光线同时到达$o$点,G和G′看到的边缘光线都是这些光线).

就是圆周. 所以可得结论:

G′看到的视觉形象(轮廓)= 1 维圆周.

最后用对话形式讲解一个重要问题,其中乙代表笔者.

**甲**　本选读自身是很清楚的,但似乎与前面例 2 的讨论有矛盾. 本选读认为,无论对观者 G 还是 G′,边缘光线的发光事件是相同的(例如 $a_1$,$b_1$),但在例 2 中,擦边可见点对观者 G 是 A,B,对观者 G′则是 A′,B′(见图 4-27). 这不是矛盾吗?

**乙**　其实两者是一致的,只不过由于例 2 使用空间语言而不容易抓住绝对的东西,因而不容易看出两者的一致性. 你先回答一个问题: 例 2 中的事件 $p_1=(t_1,\mathrm{A}')$ 对应于图 4-33 的哪个时空点?

**甲**　这正是我的问题所在. 我在图 4-33 中找不到一条世界线,使得 $p_1$ 在此线上.

**乙**　竖直线 A 就是你要找的世界线,线上的时空点 $a_1$ 就是事件 $p_1$. 类似地,例 2 的 $p_2=(t_2,\mathrm{B}')$ 就是图 4-33 的时空点 $b_1$.

**甲**　但 $a_1$,$b_1$ 是同时事件(时刻都是 $t_1$)而 $p_1$,$p_2$ 却不同时($t_1 \neq t_2$),$a_1$,$b_1$ 怎能是 $p_1$,$p_2$?

**乙**　这是同时性的相对性使然. 事件 $a_1$ 和 $b_1$ 相对于球体(因而 G)所在系 K 为同时,相对于 G′所在系 K′就不同时. $p_1=(t_1,\mathrm{A}')$ 和 $p_2=(t_2,\mathrm{B}')$ 中的 $t_1$ 和 $t_2$ 都是例 2 中观者所在系的时间坐标,而该观者认为球体在动,所以相当于本选读的 K′系,就是说,$t_1$ 和 $t_2$ 是 K′系的坐标(没加撇的原因是当时认为球在动而观者静止),所以 $t_1 \neq t_2$. 结论: $a_1$,$b_1$ 对 K 系为同时事件与 $p_1$,$p_2$ 对 K′系为不同时事件没有矛盾.

**甲**　图 4-30 的 A′点是 A 点做特列尔转动的结果,用时空图的讨论怎么见不到特列尔转动?

**乙**　这就涉及特列尔转动的起源——相对论光行差现象. 假定你在有雨无风的室外撑伞站立. 由于无风,你看见雨点竖直下落,所以你的伞柄应该竖直. 但是,如果你撑伞快速骑车,你会觉得雨点倾斜而下,你的伞柄就应与地面斜交. 把雨点改为光子也有类似的定性结果: 设观者 G 和 G′有相对运动,则他们观看同一光线时会测得来光方向有所不同. 这种现象称为光行差(aberration),在非相对论物理学中早已存在,但在相对论中有不同表达式. 在每个观者的天球面上取角坐标 $\theta$,$\varphi$(对应于纬度和经度),设观者 G′沿 $\theta=0=\theta'$的方向相对于 G 以速率 $v$ 运动,与 G 相遇于事件 $o$. 外来光子到达 G 和 G′前在每个天球面上留下一点作为印记,两点的角坐标 $\theta$,$\varphi$ 和 $\theta'$,$\varphi'$服从如下关系(称为相对论光行差公式):

$$\sin\theta'=\frac{(1-v^2)^{1/2}\sin\theta}{1+v\cos\theta},\qquad \varphi'=\varphi. \tag{4-4-15}$$

(若用非几何单位制,则 $v$ 改为 $v/c$.)利用上式可以证明(见文献[14]),只要运动物体对观者的张角足够小,物体发出的光线在两个天球面上的印记组成的图像就是相似图形,不过两者之间转过一个角度 $\theta'-\theta$,这就是特列尔转动. 请注意这两个图像是同一组光线在不同天球面上的表现,天球面是相对的(依赖于观者),但光线是绝对的(对两个观者都是这组光线,即前面说的有用光线集). 总之,特列尔转动来自光行差,而光行差是 3 维语言(空间语言)的产物;用时空图讨论时重点是抓住绝对的东西,所以没有突出特列尔转动.

**甲**　光行差公式(4-4-15)如何推导?

**乙**　最简单和最清晰的推导是用 4 维语言,但限于本书的既定范围(不出现 4 维公式),不如从略.

**甲**　例 1 和例 2 的特列尔转动角 $\beta$ 可用光行差公式证明吗?

**乙**　当然可以. 对例 1 和例 2,$\theta=0=\theta'$的方向就是物体的运动方向,即朝右,而光子的方向朝下,所以光子在天球面上的印记(点)的坐标为 $\theta=\pi/2$,代入式(4-4-15)得

$$\sin\theta'=(1-v^2)^{1/2},$$

因而特列尔转动角 $\beta\equiv\theta'-\theta$ 的正弦为

$$\sin(\theta'-\theta)=\sin(\theta'-\pi/2)=\cos\theta'=\sqrt{1-\sin^2\theta'}=v=v/c,$$

这正是式(4-4-1)和(4-4-11).

**甲**　在讨论视觉形象时,用时空语言比用 3 维语言(空间语言)有什么主要优点?

**乙**　至少可列出以下几点.

(1) 例 1 和例 2 只讨论了张角很小的情况,而本选读适用于任意张角.

(2) 例 2 只讨论了观者视线与球体速度正交的情况,而本选读适用于任意情况,即 G′在图 4-33 中的世界线可以是过 $o$ 点的任一斜直线(只须保证类时性).

(3) 用时空图可以抓住所有绝对的、与观者无关的东西,例如 $o$ 点的过去光锥面以及有用光线集和边缘光线集(因而能跟踪物体每点所发的光子),而 3 维语言(空间语言)的讨论则容易陷入同时面的图像不能自拔,看不清若干问题的实质,如坠五里

雾中,例如一见到特列尔转动就误以为G和G′看到的光线不同,而时空图4-33则清晰地告诉你两者看到的光线一样(有用光线集是绝对的,不因观者而异).

**[选读4-6完]**

## §4.5 用几何语言导出洛伦兹变换 [选读]

爱因斯坦在第一篇相对论论文(1905)中从以下两点出发推出了洛伦兹变换:(1) 相对性原理和光速不变原理(狭义相对论的两个基本假设);(2)空间和时间的均匀性(关于空间和时间性质的假设).现在,在学过了用闵氏几何表述的狭义相对论后,我们愿意用几何语言重新推出洛伦兹变换,这在某种意义上也可看作是一种"自洽性"验证.推导的关键出发点是:时空的背景几何是闵氏几何,其线元在任一惯性坐标系$\{t,x,y,z\}$的表达式为

$$\mathrm{d}s^2=-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2.$$

在几何语言中,惯性坐标系$\{t,x,y,z\}$的空间坐标原点可看作一个惯性观者(记作G),其世界线就是时空图中的$t$坐标轴.我们要推导的洛伦兹变换涉及两个有最简关联的惯性系,满足如下条件:① $\{t',x',y',z'\}$系相对于$\{t,x,y,z\}$系以亚光速$v>0$沿$x$轴正向匀速平动;② 空间坐标原点G和G′在$t'=t=0$时相遇;③ 两系空间坐标轴对应同向.有待证明的是

$$t'=\gamma(t-vx),\ x'=\gamma(x-vt),$$

$$y'=y,\ z'=z,\ \gamma\equiv1/\sqrt{1-v^2}. \qquad (4\text{-}5\text{-}1)$$

上式实质上只涉及$t,x$与$t',x'$之间的变换,所以只须就2维闵氏时空给出证明.设$p$是任一时空点,只须证明

$$t'_p=\gamma(t_p-vx_p),\ x'_p=\gamma(x_p-vt_p). \qquad (4\text{-}5\text{-}2)$$

图4-36是以$\{t,x\}$为基准系的时空图,其中G′线满足$t=v^{-1}x$.因为约定两系空间坐标原点G和G′在$t'=t=0$时相遇,故图中$q$点满足$t'_q=t_q=0$.将闵氏线元用于光子世界线有

$$0=\mathrm{d}s^2=-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}x^2,$$

所以$\mathrm{d}t/\mathrm{d}x=\pm1$,表明过任一时空点$p$的光子世界线有两条,分别是斜率为±1的直线.把斜率为+1的那一条记作A线,另一条记作B线.以$a$代表A线与G线的交点,由直线方程的"两点式"得$t_p-t_a=x_p-x_a$.因$a$在G线($t$轴)上,故$x_a=0$,所以

$$t_a=t_p-x_p. \qquad (4\text{-}5\text{-}3)$$

以$\mathrm{d}\tau$代表G线任一元段的线长(固有时间),由类时曲线的线长定义可知

$$\mathrm{d}\tau=\sqrt{-\mathrm{d}s^2}=\sqrt{\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}x^2}=\mathrm{d}t.$$

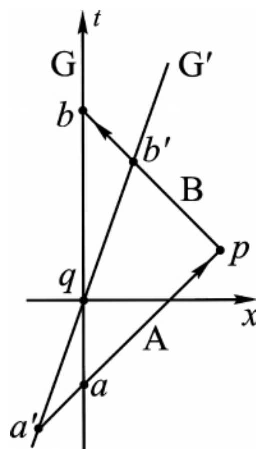



**图4-36 洛伦兹变换推导用图**

选$q$点为$\tau$的零点(选$\tau_q=0$),则G线有$\tau=t$,故式(4-5-3)可改写为

$$\tau_a=t_p-x_p. \qquad (4\text{-}5\text{-}4a)$$

类似地,以$b$代表B线与G线的交点,注意到B线的斜率为-1,故有

$$\tau_b=t_p+x_p. \qquad (4\text{-}5\text{-}4b)$$

由上两式易得

$$t_p=(\tau_b+\tau_a)/2,\quad x_p=(\tau_b-\tau_a)/2. \qquad (4\text{-}5\text{-}5a)$$

若改用$\{t',x'\}$系为基准画时空图,则光子世界线A和B仍是斜率为±1的直线.以$a'$和$b'$分别代表A线和B线与G′线的交点,以$\tau'$代表G′线的固有时(选$q$为零点,即$\tau'_q=0$),仿照前面的推导又得

$$t'_p=(\tau'_{b'}+\tau'_{a'})/2,\quad x'_p=(\tau'_{b'}-\tau'_{a'})/2. \qquad (4\text{-}5\text{-}5b)$$

如果能再证明(稍后将补证)

$$\text{(a)}\ \tau'_{a'}=\tau_a/\gamma(1-v),\quad \text{(b)}\ \tau'_{b'}=\tau_b/\gamma(1+v), \qquad (4\text{-}5\text{-}6)$$

代入式(4-5-5b)便得待证等式(4-5-2):

$$t'_p=\frac{1}{2}\left[\frac{\tau_b}{\gamma(1+v)}+\frac{\tau_a}{\gamma(1-v)}\right]=\frac{1}{\gamma}\frac{1}{1-v^2}\cdot\left[\frac{1}{2}(\tau_b+\tau_a)-\frac{1}{2}v(\tau_b-\tau_a)\right]=\gamma(t_p-vx_p), \qquad (4\text{-}5\text{-}7a)$$

$$x'_p=\frac{1}{2}\left[\frac{\tau_b}{\gamma(1+v)}-\frac{\tau_a}{\gamma(1-v)}\right]=\frac{1}{\gamma}\frac{1}{1-v^2}\cdot\left[\frac{1}{2}(\tau_b-\tau_a)-\frac{1}{2}v(\tau_b+\tau_a)\right]=\gamma(t_p-vx_p), \qquad (4\text{-}5\text{-}7b)$$

其中末步用到式(4-5-5a)以及$\gamma \equiv 1/\sqrt{1-v^2}$.

下面补证式(4-5-6). G′线的$a'q$段的线长等于

$$\tau'_q-\tau'_{a'}=\int_{a'}^{q}\sqrt{-\mathrm{d}s^2}.$$

线长是几何量(绝对量),可借任一坐标系计算. 借$\{t,x\}$系的计算给出

$$\tau'_q-\tau'_{a'}=\int_{a'}^{q}\sqrt{\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}x^2}=\int_{a'}^{q}\sqrt{\mathrm{d}t^2-(v\mathrm{d}t)^2}$$
$$=\sqrt{1-v^2}(t_q-t_{a'}),$$

其中第二步是因为G′线满足$t=v^{-1}x$. 利用$t_q=0$及$\tau'_q=0$便得

$$\tau'_{a'}=\sqrt{1-v^2}\,t_{a'}=\gamma^{-1}t_{a'}. \qquad (4-5-8)$$

$a$及$a'$都在A线上,由A线的"两点式"得

$$t_a=t_{a'}-(x_{a'}-x_a)=t_{a'}-vt_{a'}=(1-v)t_{a'},$$

其中第二步用到$x_{a'}=vt_{a'}$及$x_a=0$. 再代回式(4-5-8),利用$t_a=\tau_a$便得待证式(4-5-6a). 同理可证式(4-5-6b). 整个证明至此结束.

在推得式(4-5-5a)后,细心的读者会问:由图4-36可知$\tau_b>\tau_a$,从式(4-5-5a)看出$x_p$恒为正. 然而$p$点的$x$坐标当然可正可负(还可为零),岂非矛盾?其实,图4-36只示出$x_p>0$的情况,因为$p$点位于G线右边. $x_p<0$对应于$p$点位于G线左边的情况,只要坚持"把斜率为+1的光子世界线记作A"的约定,便有$\tau_a>\tau_b$(见图4-37),式(4-5-5a)就给出$x_p<0$(当$p$点位于G线上时还给出$x_p=0$). 可见式(4-5-5a)总是对的. 往往遇到这种情况:解析推导是普适的,但画图只能表现部分可能情况. 当然应以推导为准.

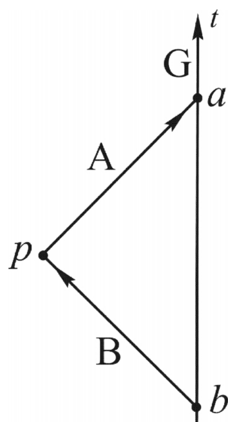



**图4-37 $p$点在G线左边时$\tau_a>\tau_b$**

## 参考文献:

[1] Geroch R. General relativity from A to B [M]. Chicago and London: The University of Chicago Press, 1978.

[2] 张元仲. 狭义相对论实验基础 [M]. 北京:科学出版社,1994.

[3] Rossi B, Hall D B. Variation of the rate of decay of mesotrons with momentum [J]. Phys Rev, 1941, 59: 223.

[4] Frisch D H, Smith J, H. Measurement of the relativistic time dilation using μ-mesons [J]. Am J Phys, 1963, 5: 342.

[5] McCrea W H. The clock paradox in relativity theory [J]. Nature, 1951, 167: 681.

[6] Dingle H. A problem in relativity theory [J]. Proc Phys Soc(London), 1956, A69: 925.

[7] 梁灿彬,周彬. 微分几何入门与广义相对论(中册) [M]. 北京:科学出版社,2009.

[8] Rindler W. Essential relativity [M]. New York: Springer-Verlag, 1977: 45.

[9] Muller R A. The twin paradox in special relativity [J]. Amer J Phys, 1972, 40: 966.

[10] 钱尚武. 关于时钟佯谬 [J]. 大学物理,1982,1(7):4.

[11] 孟广达,王润华,霍瑞云,等. 狭义相对论解决双生子问题之不可能 [J]. 大学物理,1997. 16(4):22.

[12] Hafele J C, Keating R E. Around-the-world atomic clocks: predicted relativistic time gains [J]. Science, 1992, 177: 166-167; Around-the-world atomic clocks: observed relativistic time gains [J]. Science, 1972, 177: 168-170.

[13] 爱因斯坦,等. 相对论原理(狭义相对论和广义相对论经典论文集) [M]. 赵志田,刘一贯,译. 北京:科学出版社,1980.

[14] Terrell J. Invisibility of the Lorentz contraction [J]. Phys Rev, 1959, 116: 1041.

[15] Penrose R. The apparent shape of a relativistically moving sphere [J]. Proc Camb Phil Soc, 1959, 55: 137.

[16] Weisskopf V. The visual apperrance of rapidly moving objects [J]. Phyics Today, 1960, 13: 24; 中译文在《二十世纪的物理学》. 科学出版社,1979.

(第四讲续完)

《从零学相对论》连载

# 《从零学相对论》连载⑫

梁灿彬[1]，曹周键[2]
(1. 北京师范大学 物理系，北京 100875; 2. 中科院 应用数学所，北京 100190)

## 第 5 讲 相对论质点力学

### §5.1 动量和动量守恒

在牛顿力学中，质点的动量 $\boldsymbol{p}$ 定义为质量 $m$ 与速度 $\boldsymbol{u}$ 的乘积:

$$\boldsymbol{p} \equiv m\boldsymbol{u}, \qquad (5-1-1)$$

质点所受的力定义为它的动量的时间变化率，即

$$\boldsymbol{f} \equiv \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}. \qquad (5-1-2)$$

两式结合得

$$\boldsymbol{f} = \frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}, \qquad (5-1-3)$$

而质点的加速度 $\boldsymbol{a} \equiv \mathrm{d}\boldsymbol{u}/\mathrm{d}t$，所以上式又可表为

$$\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}. \qquad (5-1-4)$$

反之，由 $\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}$ 也容易推出 $\boldsymbol{f} = \mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$，因此也可把 $\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}$ 看作 $\boldsymbol{f}$ 的定义，就是说，质点所受的力定义为它的质量与加速度的乘积. 读者会问: $\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}$ 不是人所共知的牛顿第二定律吗? 怎么说成是力的定义? 选读 5－1 对这个问题将有比较详细的讨论.

现在从相对性原理的角度考察两个小球的碰撞. 先看牛顿力学. 以 $\boldsymbol{p}_1$ 及 $\boldsymbol{f}_1$ 分别代表球 1 的动量及所受的力(来自球 2)，则 $\boldsymbol{f}_1 = \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1/\mathrm{d}t$. 同理还有 $\boldsymbol{f}_2 = \mathrm{d}\boldsymbol{p}_2/\mathrm{d}t$. 牛顿第三定律要求 $\boldsymbol{f}_1 = -\boldsymbol{f}_2$，于是

$$0 = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t},$$

其中 $\boldsymbol{p} \equiv \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$ 代表由两球组成的系统的总动量. 上式表明系统的总动量不随时间而变，所以动量守恒. 可见动量守恒是力的定义同牛顿第三定律相结合的产物. 如果从另一惯性系观测同一碰撞过程，利用由伽利略变换导出的速度变换式(1－1－6)，不难看出动量仍然守恒. 所以动量守恒的确有伽利略协变性，因而的确是(牛顿力学中的)定律. 然而，如果在狭义相对论中仍然采用动量的牛顿定义，即 $\boldsymbol{p} \equiv m\boldsymbol{u}$(其中 $m$ 为常量)，则下面的例子足以说明动量守恒不具备洛伦兹协变性. 考虑两个小球的完全非弹性碰撞. 设 K′系测得两球碰前的速度等值反向(因而总动量为零)，则由对称性可知碰后速度皆为零，表明碰撞过程对 K′系而言动量守恒. 设 K 是另一惯性系，球 2 相对于 K 系静止，我们再从 K 系考察同一碰撞过程(见图 5－1). 首先求出碰后所得的复合体 3 对 K 系的速度(简记作"3 对 K"):

3 对 K = 3 对 2 = K′对 2 = －(2 对 K′) = $\boldsymbol{v}$，

再求球 1 对 K 系的速度(记作 $\boldsymbol{u}$). 以 $\boldsymbol{u}'$ 代表 1 对 K′系的速度，则由图知 $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{v}$. 以 $u$ 简记 $u_x$，利用相对论速度变换式(1－3－3)得

| | 碰 前 | 碰 后 |
|---|---|---|
| K′系 | 1 $\boldsymbol{v}$ →    ← $-\boldsymbol{v}$ 2 | 3 ●● 不动 |
| K 系 | 1 $\boldsymbol{u}$ →    2 ● 不动 | 3 ●● $\boldsymbol{v}$ → |

图 5－1 全同小球的完全非弹性碰撞

$$u \equiv u_x = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2} = \frac{v + v}{1 + vv/c^2} = \frac{2v}{1 + v^2/c^2}. \qquad (5-1-5)$$

注记 1 本章许多公式都含有 $c$ 和 $c^2$(甚至 $c^4$)，为了显示这些系数，本章一律采用国际单位制.

设两球的质量皆为 $m$，则 K 系测得的两球总动量在碰撞前后各为

$$碰前总动量(大小) = mu + 0 = \frac{2mv}{1 + v^2/c^2},$$

碰后总动量(大小) $= 2mv$. (用到牛顿质量守恒律)

上两式表明碰撞前后总动量不等，所以动量守恒对 K 系不成立. 然而由图可知对 K′系而言动量显然是守恒的，可见动量守恒不具备洛伦兹协变性，因而不是定律. 这时有两种选择，或者放弃动量守恒律，或者通过修改有关物理量的定义给动量守恒赋予洛伦兹协变性. 鉴于守恒律对物理学的非常重要性，当然选择后者. 为了找到修改思路，先做如下考虑. 设质点被恒力加速，按照牛顿第二定律，只要时间足够长，其速率

必将超过光速，与狭义相对论相悖. 为摆脱矛盾，不妨猜测质点的质量在相对论中随速率增大而增大.（因为如果这样，质点在恒力下的加速度将越来越小，速率就有望永不达到光速.）于是想到这样的修改方案：动量仍定义为质量乘速度，但质量不再是常量而与速率 $u$ 有关，记作 $m_u$（恒为正），称为运动质量（亦称相对论质量）. 现在沿着这一思路重新审查图 5－1 中 K 系的动量守恒问题. 既然碰前球 2 静止而球 1 以速率 $u$ 运动，两者的运动质量应分别为 $m_0$（称为静质量）和 $m_u$，故

$$\text{碰前总动量（大小）}=m_u u+0=\frac{2m_u v}{1+v^2/c^2},\quad(5-1-6)$$

$$\text{碰后总动量（大小）}=M_v v,\quad(5-1-7)$$

其中 $M_v$ 代表两球复合体 3 的运动质量. 默认碰撞前后总的运动质量不变，即 $m_u+m_0=M_v$［这是很自然的默认，其深刻含义将在式（5－4－5）后关于能量守恒的一段论述中阐明］，则式（5－1－7）成为

$$\text{碰后总动量（大小）}=(m_u+m_0)v,\quad(5-1-8)$$

对比式（5－1－6）和（5－1－8）可知，为使动量守恒对 K 系也成立，必须且只须

$$m_u=m_0\frac{1+v^2/c^2}{1-v^2/c^2},\quad(5-1-9)$$

而由式（5－1－5）出发的简单计算表明

$$\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}=\frac{1-v^2/c^2}{1+v^2/c^2},\quad(5-1-10)$$

与式（5－1－9）对比便得

$$m_u=\frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.\quad(5-1-11)$$

可见只有承认 $m_u$ 随速率 $u$ 按上式变化方可保证图 5－1 的碰撞过程对 K 系有动量守恒. 所以狭义相对论中质点的动量应定义为

$$\boldsymbol{p}\equiv m_u\boldsymbol{u}，\text{其中 } m_u \text{ 由式（5－1－11）给出.}\quad(5-1-12)$$

以上虽然只就图 5－1 的过程做了讨论，但后来发现这样定义的动量在任何过程中都是守恒量.

令
$$\gamma_u\equiv 1/\sqrt{1-u^2/c^2},\quad(5-1-13)$$

则相对论动量亦可表为

$$\boldsymbol{p}=\gamma_u m_0\boldsymbol{u}=\frac{m_0\boldsymbol{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.\quad(5-1-14)$$

相对论动量（矢量）的大小则为

$$p=\gamma_u m_0 u=\frac{m_0 u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.\quad(5-1-15)$$

若质点的速率 $u=c$，则上式右边（以零为分母的分数）无意义；又若质点的速率 $u>c$，则上式右边为虚数，但物理上要求质点的动量有意义且其大小为实数，所以应有 $u<c$，可见质点必须亚光速.

## §5.2　力的定义

有了动量定义就可对力下定义. 在狭义相对论中仍把质点所受的力 $\boldsymbol{f}$ 定义为质点动量的时间变化率：

$$\boldsymbol{f}\equiv \mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t，\text{其中 } \boldsymbol{p} \text{ 由式（5－1－14）定义.}\quad(5-2-1)$$

相对性原理要求上式有洛伦兹协变性，就是说，对另一惯性系 K′应有

$$\boldsymbol{f}'\equiv \mathrm{d}\boldsymbol{p}'/\mathrm{d}t'.\quad(5-2-1')$$

从以上两式出发，由 $\boldsymbol{p}'$ 与 $\boldsymbol{p}$ 以及 $t'$ 与 $t$ 的变换关系就可求得 $\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{f}'$ 的变换关系，略.

［选读 5－1］

牛顿第二定律是众所周知的. 为了证明它是物理定律，中学老师会用演示仪器分别测定物体的质量 $m$、所受的力 $f$ 以及获得的加速度 $a$，列成表格，从中看出 $f$ 值总等于 $m$ 与 $a$ 值的乘积. 然而你可曾注意到，在做这类实验之前，老师并未对力和质量（作为两个物理量）下过定量的定义？老师和课本的确说过“力是物体对物体的作用”、“质量是物体所含物质的多少”一类的话，但这都不是（定量的）定义. 要对一个物理量下定义，至少应该给出一个在原则上是可行的测量方案（虽然在当时的实验条件下可能难以操作），然而上面关于力和质量的说法完全没有给出任何测量方案. 试想，公式 $f=ma$ 涉及的三个量中竟然有两个尚未定义，何谈用实验（测量）来验证这个公式？事实上，演示实验中的测力计和天平（质量测量仪）分别是根据力和质量的定义设计的，在力和质量尚未定义的情况下，怎能知道这些仪器的读数分别是力和质量？这样一来，$f=ma$ 还能算是实验定律吗？实事求是地说，牛顿在发表他的划时代巨著《自然哲学的数学原理》时，对某些微妙的内在逻辑关系并未完全理顺. 作为在科研战线上冲锋陷阵的勇士，出现这种纰漏是不难理解的——搜集整理战利品的细致工作不妨留待打扫战场的士兵们完成. 事实的确如此. 与牛顿运动定律有关的逻辑问题的澄清是后人的贡献（特别是牛顿逝世后约 200 年的马赫）. 下面简介关于这一问题的现代认识.

（1）对质量下定义：以 $m_1$，$m_2$ 分别代表物体 1 和 2 的、有待定义的质量，设它们碰撞时获得的加速度分别是 $a_1$ 和 $a_2$（这是早有定义的量），则它们的质量

之比 $m_1/m_2$ 定义为

$$m_1/m_2 \equiv a_2/a_1. \qquad (5-2-2)$$

再任选某一物体的质量(记作 $m_1$)作为质量的单位(令 $m_1=1$),则任一物体的质量(记作 $m_2$)便可通过与物体1的碰撞而测得.这就是关于质量的一个原则可行的测量方案①.

(2) 对力下定义:物体所受的力 $\boldsymbol{f}$ 定义为它的质量 $m$ 与它的加速度 $\boldsymbol{a}$ 的乘积,即

$$\boldsymbol{f}=m\boldsymbol{a}.$$

照此说来,$\boldsymbol{f}=m\boldsymbol{a}$ 只是力的定义而不是什么定律! 许多物理工作者在初次听到这一看法时都十分不满.他们说"定律是客观存在的,而定义则是人为下的,你把定律降格为定义,岂不是把全部物理'干货'都丢光了吗!?"其实这是只知其一,不知其二.$\boldsymbol{f}=m\boldsymbol{a}$ 本身只是力 $\boldsymbol{f}$ 的定义,与它相联系的所有物理"干货"都体现在不同场合下力的具体表达式中.例如,系在弹簧上的木块所受的弹性力 $f$ 与木块的位移 $x$ 满足胡克定律

$$f=-kx, \qquad (k\ \text{为常数}) \qquad (5-2-3)$$

其中的 $f$ 无非是木块的质量 $m$ 与加速度 $a\equiv \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$ 的乘积($f=ma$),与式(5-2-3)结合乃得

$$m\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2=-kx, \qquad (5-2-4)$$

而这正是木块的动力学方程,包含了这一问题的全部"干货".又如,电磁场($\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$)中的带电质点所受的电磁力由洛伦兹力公式给出:

$$\boldsymbol{f}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}), \qquad (q\ \text{和}\ \boldsymbol{u}\ \text{是质点的电荷和速度}) \qquad (5-2-5)$$

其中的 $\boldsymbol{f}$ 无非是质点的质量 $m$ 与加速度 $\boldsymbol{a}\equiv \mathrm{d}\boldsymbol{u}/\mathrm{d}t$ 的乘积,代入上式乃得

$$m\mathrm{d}\boldsymbol{u}/\mathrm{d}t=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}). \qquad (5-2-6)$$

上式可充当电磁场中带电质点的动力学方程,包含了这一问题的全部"干货".

可见,极端地说(当然我们并不提倡),即使把"力"这个词汇从物理学名词中删除,物理学(包括力学!)照样可以存活,而且不受任何实质性的影响.事实上,越是靠近现代的物理学(例如量子力学),"力"这个词就越是不常出现.

英国相对论学家**伦德勒**在他的书[Rindler(1982)]的101页中写下这么一段话(下面是笔者的中译文):

**"让我们回顾一下牛顿第二定律的两个熟悉的形式:$\boldsymbol{f}=m\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{f}=\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$.严格说来,这只是'半个定律',因为它只是力的定义,直到它与另外的'半定律'结合之前都不具备任何物理内容.所谓另外的'半定律'可以是引力 $f=-Gm_1m_2r^{-3}\boldsymbol{r}$,或者洛伦兹力定律 $\boldsymbol{f}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})$.把这两个'半定律'结合起来方可给出质点的运动."**

当然,伦德勒关于 $\boldsymbol{f}=m\boldsymbol{a}$ 是"半定律"的称谓只是为了形象而采用的戏称,究其实质,它就是一个定义.

再回头讨论式(5-2-2),它是牛顿力学中质量 $m$ 的定义.无独有偶:严格说来相对论的静质量 $m_0$ 也应补定义(给出原则可行的测量方案).考虑两个小球的简单碰撞过程:碰前球2静止而球1向右碰球2,碰后两球都有速度.以 $m_1$ 和 $m_2$ 依次代表两球的质量,$u_1$ 和 $u_1'$ 依次代表球1碰撞前后的速度,$u_2'$ 代表球2碰后的速度(均指沿右向单位矢的分量),则由牛顿力学的动量守恒律知

$$m_1u_1=m_1u_1'+m_2u_2', \qquad (5-2-7)$$

故

$$m_2=m_1(u_1-u_1')/u_2', \qquad (5-2-7')$$

因为 $u_1$、$u_1'$ 和 $u_2'$ 原则上都可测量,选 $m_1$ 为单位便得 $m_2$.所以上式也可看作牛顿力学中的质量定义.受此启发就不难找到相对论中静质量 $m_0$ 的定义.利用相对论动量表达式(5-1-14)可以写出上述碰撞过程的动量守恒式:

$$\gamma_{u_1}m_{01}u_1=\gamma_{u_1'}m_{01}u_1'+\gamma_{u_2'}m_{02}u_2', \qquad (5-2-8)$$

因而

$$m_{02}=m_{01}(\gamma_{u_1}u_1-\gamma_{u_1'}u_1')/\gamma_{u_2'}u_2', \qquad (5-2-8')$$

测得 $u_1$、$u_1'$ 和 $u_2'$ 后自然有 $\gamma_{u_1}$、$\gamma_{u_1'}$ 和 $\gamma_{u_2'}$,选 $m_{01}$ 为单位,上式便可充当球2静质量 $m_{02}$ 的定义.

[选读5-1完]

## §5.3 动能

**在牛顿力学中,质点的动能 $E_k$ 是质点速率 $u$ 的函数,可记作 $E_k(u)$,它是由以下两个要求定义的:①质点静止时动能为零,即 $E_k(0)=0$;② $E_k$ 的时间变化率等于质点所受的力的功率 $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}$.由此得**

$$\frac{\mathrm{d}E_k(u)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}t}=mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}.$$

**为了在求定积分时不与积分限的符号相混淆,先把上式的自变量 $u$ 改记作 $u'$,即**

$$\frac{\mathrm{d}E_k(u')}{\mathrm{d}t}=mu'\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t},$$

① 无独有偶.在库仑定律发表时,物理界对于电荷尚未下过定量的定义.电荷的严格定义是后来的科学家[特别是高斯(Gauss)]给出的,基本做法也是先定义两个点电荷的比值,再指定一个点电荷为电荷单位.详见文献[1]第5,6页.

再从 $u'=0$ 到 $u'=u$ 做定积分得

$$E_k(u)-E_k(0)=m\int_0^u u'\mathrm{d}u'=\frac{1}{2}m(u^2-0)=\frac{1}{2}mu^2.$$

注意到 $E_k(0)=0$，便得到动能作为速率的函数的表达式

$$E_k(u)=mu^2/2. \qquad (5-3-1)$$

在相对论中，力所做的功和功率仍用牛顿力学的定义，质点的动能仍按上述两点要求定义，结果的不同来自动量 $p$ 定义的不同(从 $\boldsymbol{p}\equiv m\boldsymbol{u}$ 改为 $\boldsymbol{p}\equiv m_u\boldsymbol{u}$)：

$$\frac{\mathrm{d}E_k(u)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}(m_u\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}t}=$$

$$m_u\boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\frac{\mathrm{d}m_u}{\mathrm{d}t}=m_u u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+u^2\frac{\mathrm{d}m_u}{\mathrm{d}t}, \qquad (5-3-2)$$

其中 $\mathrm{d}m_u/\mathrm{d}t$ 可借用式(5-1-11)表示为

$$\frac{\mathrm{d}m_u}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{cm_0}{\sqrt{c^2-u^2}}\right)=\frac{m_u u}{c^2-u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}, \qquad (5-3-3)$$

代入式(5-3-2)得

$$\frac{\mathrm{d}E_k(u)}{\mathrm{d}t}=(c^2-u^2)\frac{\mathrm{d}m_u}{\mathrm{d}t}+u^2\frac{\mathrm{d}m_u}{\mathrm{d}t}=c^2\frac{\mathrm{d}m_u}{\mathrm{d}t}. \qquad (5-3-4)$$

先将自变量 $u$ 改记作 $u'$，即

$$\frac{\mathrm{d}E_k(u')}{\mathrm{d}t}=c^2\frac{\mathrm{d}m_{u'}}{\mathrm{d}t},$$

再从 $u'=0$ 到 $u'=u$ 做定积分得

$$E_k(u)-E_k(0)=c^2\int_{m_0}^{m_u}\mathrm{d}m_{u'}=m_u c^2-m_0c^2.$$

注意到 $E_k(0)=0$，便得到动能的相对论表达式

$$E_k(u)=m_u c^2-m_0c^2. \qquad (5-3-5)$$

将上式改写为

$$E_k(u)=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}-m_0c^2=m_0c^2\left[(1-u^2/c^2)^{-1/2}-1\right], \qquad (5-3-6)$$

再把 $(1-u^2/c^2)^{-1/2}$ 展开为泰勒级数：

$$(1-u^2/c^2)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}(u/c)^2+\frac{3}{8}(u/c)^4+\cdots,$$

当 $u\ll c$ 时只保留上式右边前两项(只保留到二阶小项)，便得

$$E_k(u)\approx m_0c^2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2-1\right]=\frac{1}{2}m_0u^2,$$

可见相对论动能在 $u\ll c$ 时近似回到牛顿动能，这再次从一个侧面表明牛顿力学是狭义相对论的低速近似.

[选读 5-2]

前已指出，只要用运动质量 $m_u$ 代替牛顿动量 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{u}$ 中的 $m$，所得结果便是相对论动量 $\boldsymbol{p}=m_u\boldsymbol{u}$. 有鉴于此，某些初学者以为只要用 $m_u$ 代替牛顿动能 $E_k=mu^2/2$ 的 $m$ 便得相对论动能，然而这是误解. 因为

$$E_k=m_uc^2-m_0c^2=m_uc^2(1-m_0/m_u)$$
$$=m_uc^2\left[1-(1-u^2/c^2)^{1/2}\right], \qquad (5-3-7)$$

把 $(1-u^2/c^2)^{1/2}$ 展开为泰勒级数：

$$(1-u^2/c^2)^{1/2}=1-\frac{1}{2}(u/c)^2-\frac{1}{8}(u/c)^4-\frac{1}{16}(u/c)^6-\cdots,$$

再代回式(5-3-7)给出

$$E_k=m_uc^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{u}{c}\right)^4+\frac{1}{16}\left(\frac{u}{c}\right)^6+\cdots\right]. \qquad (5-3-8)$$

在非低速情况下高阶项不能忽略，所以 $E_k\neq m_uu^2/2$. 可见，非低速情况下的相对论动能既不能表为 $m_0u^2/2$，也不能表为 $m_uu^2/2$. [选读 5-2 完]

## §5.4　能量和能量守恒

质点动能的相对论表达式(5-3-5)可改写为

$$m_uc^2=E_k(u)+m_0c^2. \qquad (5-4-1)$$

我们至今只知道 $E_k(u)$ 是质点的动能，因而 $m_uc^2$ 和 $m_0c^2$ 都有能量的量纲. 它们有什么物理意义吗？爱因斯坦大胆地把 $m_uc^2$ 解释为质点在速率为 $u$ 时的能量，记作 $E$，即

$$E=m_uc^2, \qquad (5-4-2)$$

于是 $m_0c^2$ 自然就是速率为零时的能量，称为静能(rest energy)，记作 $E_0$，即

$$E_0=m_0c^2, \qquad (5-4-3)$$

所以就有

$$E=E_k+E_0, \qquad (5-4-4)$$

即质点的能量 $E$ 等于动能加静能(所以也把 $E$ 称为质点的总能). 由式(5-4-2)及(5-1-11)可得质点能量(总能)的表达式

$$E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \qquad (5-4-5)$$

与式(5-1-15)后面的讨论类似，上式表明质点的速率必须满足 $u<c$，否则质点的能量 $E$ 失去意义. 从本章开始至今的讨论对象都是质点. 不过，我们也不妨试着把式(5-4-5)用于光子. 光子的 $u=c$ 导致式(5-4-5)的分母为零，要使分数有意义，除非分子也为零(这时分数为不定值). 所以，如果默认式(5-4-5)对光子也成立，就能推出光子的静质量为零. 近代物理中有不止一种途径能导致光子静质量

为零的结论.

能量概念在物理学中总是同能量守恒捆在一起的,因为引入(定义)一个不守恒的能量将不会有什么用处.当爱因斯坦首次大胆地把 $m_u c^2$ 解释为质点的总能量时,他也默认(假定)这是一个守恒量.这一守恒性业已取得迄今所有实验(特别是大量的高能粒子实验)的支持.而且,非常有趣的是,相对论中的能量守恒律与动量守恒律的关系非常密切:只要动量守恒律成立,便可纯理论地证明能量守恒律成立[证明见文献[2]选读6-3-1].其实,也许你已经注意到,§4.1在证明动量在K系中守恒时就已暗暗地用到了能量的守恒性,因为在写出式(5-1-8)时默认了一个公式 $m_u + m_0 = M_v$,此式乘以 $c^2$ 后两边分别就是碰撞前后的总能量.可见,假若能量不守恒,动量也不会守恒.

下面再来讨论静能."静止物体也有能量"的提法本身并不惊人,人们在相对论诞生前就早已知晓.例如,子弹从枪口射出时枪身后退,子弹和枪身都获得动能,这份能量必定是由开枪前静止枪身内部的能量转化而来的——谁都知道枪身内的火药存在着化学能.然而,"物体的静能等于其静质量的 $c^2$ 倍,即 $E_0 = m_0 c^2$"则是爱因斯坦的划时代重大贡献.非相对论中与静能最类似的能量品种就是物体的内能(火药的化学能也是内能的一部分),然而谈及内能时总要选定一个状态作为参考态(指定它的内能为零)①.所以内能是某种"相对量",即相对于某参考态而言的量.由于参考状态原则上可以任选,内能可以灵活到一个任意常数.然而相对论却并非如此.在相对论中,物体的静能 $m_0 c^2$ 也可称作它的内能,但其值是绝对的(完全确定的),不允许有任何灵活余地②.作为后果,我们不免好奇地想知道一个普通物体(例如一袋方便面)的内能大约有多大(而在非相对论中这是个没有意义的问题).答案是:大得惊人.一个 $m_0 = 1$ g 的物体(一袋方便面的静质量的1%)的静能竟然达到

$$m_0 c^2 = 10^{-3}\ \text{kg} \times (3 \times 10^8\ \text{m/s})^2 = 9 \times 10^{13}\ \text{J},$$

大约相当于在日本广岛爆炸的原子弹所释放的能量(亦即 $2 \times 10^4$ t TNT炸药爆炸时所释放的能量)!此等巨大的静能可以被开发(转化为其他能量形式)和利用吗?如果我说送你一亿元巨款,并已存入银行,但声明任何人(包括你)都无权支取,这种空头支票又有什么用处?不过从开枪的例子我们早已知道至少火药的一部分静能(化学能)是可以被开发和利用的.可惜的是火药的化学能只是全枪的静能的很小一部分,所占比例连"九牛一毛"都不到.这是因为化学能只涉及分子之间的化学力.如果一步步地深入到越来越微观的领域,可被利用的静能比例就会越来越大.以原子核的裂变为例.设静质量为 $M_0$ 的静止铀核(母核)裂变为两块(两个子核),其静、动能依次为 $m_{01}c^2$,$E_{k1}$ 和 $m_{02}c^2$,$E_{k2}$,则由能量守恒定律可知

$$M_0 c^2 = (m_{01}c^2 + E_{k1}) + (m_{02}c^2 + E_{k2}),$$

故

$$M_0 c^2 - (m_{01}c^2 + m_{02}c^2) = E_{k1} + E_{k2} > 0. \quad (5-4-6)$$

上式表明系统总静能在裂变前后的差值恒为正,可见静能在裂变过程中并不守恒.其实我们是从能量(总能)守恒出发推出了静能不守恒,这并不奇怪,因为过程中还涉及动能 $E_{k1} + E_{k2}$,正是静能的差值 $M_0 c^2 - (m_{01}c^2 + m_{02}c^2)$ 转化成了子核的动能.由 $M_0$,$m_{01}$ 和 $m_{02}$ 的值就可求得子核动能的值.上述讨论就是原子弹的理论基础(虽然只是大为简化的讨论).请注意这一讨论是以相对论的能量公式为基础的,所以人们说原子弹是相对论的产物.

虽然原子弹的放能远比开枪时的放能要大,但也不过相当于1 g物质的静能而已,试想爆炸前的原子弹有多少克物质啊!可见原子弹爆炸时释放的能量仍然只是原子弹总静能的"冰山一角"③.这是因为原子弹涉及的也只是原子核的范畴,事实上,内能的绝大部分(约99%)存贮在构成物体的基本粒子中.每个基本粒子都有一份静能,而且在适当条件下可以转化为其他形式的能量.例如,电子(electron)的反粒子叫做正电子(positron),其静质量与电子相同,其电荷与电子电荷等值异号(即为正,故称正电子),当电子与正电子相遇时会湮没(消失)并产生两个光子,电子和正电子原来具有的能量(主要是静能)全部转化为两个光子的动能(请注意光子的静能为零).综上所述可知,物体含有的巨大静能并非空头支票而是实

---

① 例如,当计算涉及饱和蒸汽在某一状态的内能值时可由查表解决,而该表[见Sonntag的《Introduction to Thermodynamics Classical and Statistical》书末的附表A.1.1和A.1.2.]是以温度为0.01 ℃,压强为0.611 3 kPa这一状态为参考态的,即规定饱和液体在该态的内能为零.

② 静质量的绝对性有其更为深刻的原因.根据广义相对论的爱因斯坦方程(见§6.5),任何静质量都提供引力,而引力就是时空的弯曲(见§6.1).时空曲率的绝对性保证了静质量的绝对性(不存在零点选择的灵活性).

③ "九牛一毛"和"冰山一角"都是生活用语,虽然形象,却欠准确.定量地说,1 g物质所含静能为 $9 \times 10^{13}$ J,而燃烧1 g煤所放出的能量约为 $3 \times 10^4$ J,与静能之比仅为 $3 \times 10^{-10}$,故言化学能只占"九牛一毛".而原子核核心部分的静质量约有 $10^{-4}$ 倍转化为释放的能量,虽比 $3 \times 10^{-10}$ 大很多,仍属很小,故言"冰山一角".

实在在的能量.

让我们再回到守恒律.在牛顿力学中有动量、能量和质量守恒律.在相对论中,已经讲过动量和能量是守恒的.至于质量是否守恒,这首先取决于你谈的是运动质量 $m_u$ 还是静质量 $m_0$. 由于 $E \equiv m_u c^2$ [式(5-4-2)],能量 $E$ 守恒也就是运动质量 $m_u$ 守恒,两者说的是一回事.余下的问题是:静质量是否守恒?答案是否定的,因为由 $E_0 = m_0 c^2$ 可知静质量 $m_0$ 正比于静能 $E_0$,而式(5-4-6)分明表明静能并不守恒.“静能不守恒”是应该强调的结论.为防止概念混淆,此处有必要指出“守恒量”和“不变量”是两个完全不同的概念.守恒量(conserved quantity)是指在物理过程中保持不变(不随时间而变)的量,强调物理过程;不变量(invariant)则是指不随坐标系、参考系或观察者之类的人为因素的改变而改变的量,强调坐标系等的改变,并不涉及时间.举例来说,在相对论中,能量是守恒量而非不变量,静质量是不变量而非守恒量,带电粒子的电量则既是守恒量又是不变量(讨论从略).

(第五讲未完,待续)

(上接59页)

完成并投入使用,它作为天文系天文教学网上资源的重要组成部分,已在我系天文教学中发挥了重要作用(参见网址:http://astrowww.bnu.edu.cn/shijianjiaoxue/).随着天文实践教学的发展,如何更加有效地丰富和充分利用这些实践教学资源是一个值得探讨的问题.希望我们在实践教学资源库建设上的一些探索,能够对天文实践教学资源的完善和共享提供一点借鉴和帮助,对我国天文教育事业的发展起到一些有益的帮助.

## 参考文献:

[1] 张燕平,陈黎.深化改革,推动我国高等院校天文教育的发展[J].北京师范大学学报(自然科学版),2005,41(3):221-224.

[2] 赵春青,姜咏芳,刘玉升,等.加强实践教学资源建设,提高学生综合实践能力[J].实验技术与管理,2011,28(11):161-163.

[3] 孙晓鲲,牛爱芳,杨沛.以应用需求为导向,构建应用型大学实践教学平台[J].实验技术与管理,2011,28(3):334-338.

[4] 吴娟,乔翠兰,郑小平.天文教育网站设计的实践探索[J].北京师范大学学报(自然科学版),2005,41(3):291-295.

[5] 郭斌.对教学资源库建设的思考[J].宁夏教育科研,2011(105):18-19.

[6] 高轶昆.教学资源库建设的一般性原则[J].中国教育技术装备,2012(20):15-16.

# The construction of digital resource library for astronomical practice teaching

ZHANG Wen-zhao, ZHANG Yan-ping, DENG Kai-ying, BAI Yu, ZHANG Zhu-mei, GAO Jian
(Department of Astronomy, Beijing Normal University; Beijing 100875, China)

**Abstract:** Astronomy is a discipline based on observations. The development of modern astronomy, highlighting the importance of astronomical observations in the major discoveries, puts forward higher requirements on astronomical talent. Currently, practice teaching is regarded as one of the most important aspects in undergraduate teaching by all of the departments of astronomy in Chinese colleges and universities. Practice teaching resources show explosive growth in types and quantities with the growing number of inputs for practice teaching, as well as the rapid development of computer, networking and multimedia technology. Tbis article, taking the construction of practice teaching dagital resource library in the department of astronomy in Beijing Normal University for example, explores the systematicness, rationality and sharing of the practice teaching integration.

**Key words:** astronomy education; practice teaching; digital resource library

《从零学相对论》连载

# 《从零学相对论》连载⑬

梁灿彬[1]， 曹周键[2]

(1. 北京师范大学 物理系，北京 100875; 2. 中科院 应用数学所，北京 100190)

## §5.5 对“质能相当性”的述评

读者大概早已知道 $E=mc^2$ 是爱因斯坦相对论的最成功的标志性公式，它表明质量 $m$ 与能量 $E$ 相当(或等价)，因为两者在数值上只差一个常值倍数 $c^2$. 通常称此式为质能关系式，它反映质能相当性. 可惜这一说法颇嫌粗略，因为在相对论中质量有运动质量 $m_u$ 与静止质量 $m_0$ 之分，能量也有总能量 $E$ 与静止能量 $E_0$ 之别. 不免要问: 什么“质”与什么“能”相当? 答案似乎不难给出，因为你会把 $E=mc^2$ 写成两个准确公式:

$$(\text{a})\ E=m_uc^2;\qquad (\text{b})\ E_0=m_0c^2, \qquad (5-5-1)$$

并且说:(a) 运动质量相当于总能量;(b) 静止质量相当于静能量. 两者都是质能相当性的反映. 许多相对论教材也都若明若暗地这样讲过. 然而，爱因斯坦后来建议把运动质量 $m_u$ 的概念从相对论中删除，从而导致 $E\equiv m_uc^2$ 不再有意义，于是式(5-5-1)的解说就成了问题. 不错，狭义相对论的原始表述中存在着静质量 $m_0$、静能量 $E_0$、运动质量(又称相对论质量) $m_u$ 和总能量 $E$ 等 4 个概念. 然而，$E=m_uc^2$ 和 $E_0=m_0c^2$ 表明这 4 个量中只有 2 个是独立的. 经历了狭义相对论发展初期的一些曲折后，爱因斯坦在 1948 年的一次私人通信中写道 “给物体引入质量 $M=m/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 的概念并无益处，我们无法对它下一个清晰的定义. 除了‘静质量’$m$ 外最好不引入其他质量概念. ”随着 4 维语言在相对论中的使用，越来越多的相对论学者认识到运动质量的概念利少弊多，纷纷放弃. 例如，朗道和栗弗席兹的《场论》1948 年版中的“质量”一词一律是指静质量，书中绝无“运动质量”或“相对论质量”的提法. 事实上，大量近代文献都只保留质量和能量两个概念，“质量” $m$ 一律是指静质量，是不变量而非守恒量(既然只保留一个质量，就无须再冠以“静”字，也不必对 $m$ 再加下标“0”)；而能量则是指质点的总能，是守恒量而非不变量，与 $m$ 的关系为 [见式(5-4-5)]

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\gamma_u mc^2.\ (m\ \text{现在代表静质量}) \qquad (5-5-2)$$

虽然 4 个原始词汇只保留了能量和质量 2 个，但真正放弃的只有 1 个，就是那个本来就应放弃的“运动质量”$m_u$. 静能一词虽未列入保留之列，但它可看作“总能量”一词的特例: 质点的静能无非是质点相对于某一特殊惯性系的总能，该系认为质点在所关心的时刻(瞬时)是静止的.

既然 $m_u$ 概念已被删除，公式 $E=m_uc^2$ 自然丧失意义，于是真正的“质能相当性”就只体现为静能相当于静质量，即 $E_0=mc^2$(其中的 $m$ 不再写成 $m_0$). 可见，相对论的标志性公式虽然依据历史习惯写成 $E=mc^2$，但必须将式中的 $E$ 和 $m$ 分别理解为静能和静质量. 这种理解丝毫无损于“质能相当性”的光辉，事实上，上节关于原子弹放能机制的特例正是基于 $E_0=m_0c^2$ 以及能量守恒律做出的. [当时指出 $M_0c^2$ 和 $m_{01}c^2+m_{02}c^2$ 分别是裂变前后的静能，而两者之差就是裂变放出的能量.]

“质能相当性”导致“质即是能，能即是质”，于是人们索性创造一个新名词——质能(mass-energy)——来称呼质量和能量. 在不少教科书中，质能既可以指静质量和静能量，也可以指运动质量和总能量. 然而，放弃了运动质量概念之后，“质”字的唯一解释就是静质量，质能一词就只保留一种意义，即静质量和静能. 这是应该注意的.

美国相对论学者 Adler 曾发表题为“爸，质量真与速度有关吗?”的文章 [Adler(1987)]，详细分析了引入相对论质量的利弊得失. 文章一开头就说: “我的儿子在听了中学物理第一天的课后向我提出了本文题目的问题. 我的回答是‘不’，‘不过，是的，……’，‘实际上，不是的，但是别告诉你的老师.’结果他第二天就退选了物理课. ”文章描写了物理教学界在围绕着相对论质量这个问题上的混乱局面，指出了引入相对论质量的种种弊端，不妨一阅. 此后还有许多这方面的讨论文章.

[选读 5 -3]

本选读以对话方式介绍笔者在删除运动质量概念这一问题上的意见,其中乙代表笔者.

甲 为什么运动质量 $m_u$ 的概念应该删除?

乙 首先是因为它根本没有存在的必要,其次是它的存在容易导致某些混淆.

甲 那么,为什么许多书(包括您这本书)都要引进这一概念?

乙 让我们先回顾本书引入 $m_u$ 的过程. 第一步,如果在相对论中仍用牛顿的动量定义 $\boldsymbol{p}\equiv m\boldsymbol{u}$ (其中 $m$ 为常量),则动量守恒定律失效. 第二步,由牛顿的 $\boldsymbol{f}=m\boldsymbol{a}$ 可知恒力作用下的质点必将超光速. 为防止超光速可以假定质量随速率 $u$ 而变(成正变),于是把动量定义为 $\boldsymbol{p}\equiv m_u\boldsymbol{u}$. 第三步,为保证动量守恒,$m_u$ 只能取 $m_u=m_0/\sqrt{1-u^2/c^2}$ 的形式. 这种"三部曲"讲法的好处是便于讲解和接受,有其教学法上的优越性;缺点是人为地引进了多余的运动质量概念,而且往往还认为它反映惯性.

甲 为什么说 $m_u$ 是多余的概念?

乙 首先是因为从后来的 $E=m_uc^2$ 可知 $m_u$ 与 $E$ 只差一个常数因子 $c^2$,两者保留一个便已足够,而 $E$ (作为总能)有非常明确的含义和非常重要的地位,自然只能删除 $m_u$ 的概念. 其次,在爱因斯坦创立狭义相对论(1905 年)后不久,闵氏在 1908 年率先向同行们阐述了 4 维时空的概念及其重要性,随后,有越来越多的学者逐渐认识到用 4 维语言讨论相对论比以前的 3 维语言具有无与伦比的优越性,而且顺便也发现 $m_u$ 在 4 维语言中毫无地位. [其唯一"地位"就是:$m_u$ 等于总能 $E$ 除以 $c^2$. 反之,$m_0$(作为不变量)在 4 维语言中却不可或缺.] 所以说 $m_u$ 是多余的概念.

甲 您刚才说"而且往往还认为它反映惯性". 难道 $m_u$ 不反映质点(物体)的惯性吗?

乙 Adler(1987)详述了他认为 $m_u$ 不反映惯性的理由(详见该文),指出只有静质量才是物体惯性的量度(反映与物体相对静止的观者所感到的该物体的惯性).

甲 您在对话开头时说过"其次是它的存在容易导致某些混淆". $m_u$ 的存在会导致什么混淆?

乙 首先,只要保留 $m_u$,谈及质量时就总要加上定语("运动"或"静止"),如果为陈述简单而不加定语,就容易造成混乱. 其次,正文中已经指出,对"质能相当性"的正确理解只能是"静质量相当于静能,静质量为 $m_0$ 的静止物体的能量为 $m_0c^2$",但在使用 $m_u$ 的教材中,不少作者也常把"质能相当性"理解为"运动质量相当于总能量,运动质量为 $m_u$ 的运动物体的能量为 $m_uc^2$",然而这其实是同义反复,因为在用 4 维语言的讲述中从来不定义 $m_u$,如果硬要引入 $m_u$,就只好把它定义为 $E/c^2$. 何必如此画蛇添足呢?

[选读 5 -3 完]

## §5.6 结合能和质量亏损

我们一直在讨论质点. 按照定义,当物体的形状和大小对所关心的问题影响不大时,该物体就可被看作质点. 因此,任何客体(小至微观粒子、大到一个星系)在适当条件下都可当作质点处理. 常见的质点是由若干粒子构成的复合体(如原子核),质点的静能自然是指复合体在质心静止时的能量,它等于以下 3 部分之和:① 复合体内各粒子的静能之和(恒为正);② 各粒子相对于质心系的动能之和(为正或为零);③ 各粒子之间的相互作用能. 以氘的原子核为例. 氘核由 2 个核子(1 个质子和 1 个中子)组成,两者在核力的吸引下结合成一个稳定系统,只有从外界提供适当能量方可把两者分开,所需的最小能量就叫做氘核的结合能. 原则上可以根据核力的大小来计算结合能,但核力过于复杂,通常都走捷径,就是利用质能关系式来计算结合能.

在原子物理中质量和能量的常用单位分别是 u (原子质量单位)和 MeV(兆电子伏),与相应的国际单位的关系为

$$1\ \mathrm{u}\approx 1.66\times10^{-27}\ \mathrm{kg},\quad 1\ \mathrm{MeV}\approx1.6\times10^{-13}\ \mathrm{J}. \tag{5-6-1}$$

由质能关系式又知

$$1\ \mathrm{kg}\ 质量相应的静能=1\times(3\times10^8)^2\ \mathrm{J}=\frac{9}{1.6}\times10^{29}\ \mathrm{MeV}, \tag{5-6-2}$$

故

$$1\ \mathrm{u}\ 质量相应的静能=1.66\times10^{-27}\times\left(\frac{9}{1.6}\times10^{29}\ \mathrm{MeV}\right)=931.5\ \mathrm{MeV}^{①}.$$

由查表可得质子、中子和氘核的静质量依次为

$$m_\mathrm{p}=1.007\,28\ \mathrm{u},$$
$$m_\mathrm{n}=1.008\,67\ \mathrm{u},$$

① 直接乘除得值为 933.8 MeV,考虑到所涉及的公式都是近似等式,更准确的结果为 931.5 MeV.

$$m_d = 2.01355\ \text{u},$$

故 $$m_p + m_n = 2.01594\ \text{u} > m_d,$$

这正是静质量不守恒的具体事例. $m_d < m_p + m_n$表明只有从外界吸取能量方可使氘核分裂为自由质子和中子，而这份能量的最低数值就是氘核的结合能，故

氘核的结合能 $= [(m_p + m_n) - m_d]c^2$

$=$质量$[(m_p + m_n) - m_d]$相应的静能.

注意到$(m_p + m_n) - m_d = 0.002389\ \text{u}$，便得

氘核的结合能 $= 0.002389 \times 931.5\ \text{MeV}$

$= 2.225\ \text{MeV}.$

反之，一个质子和1个中子结合为一个氘核时必定放出能量，其值等于氘核的结合能. 一般而言，质子和中子结合成任一原子核时放出的能量称为该原子核的结合能(binding energy). 以$E_0$代表原子核的静能，$E_{0i}$代表第$i$个核子的静能，则原子核的结合能$E_b$也可等价地定义为①

$$E_b \equiv \sum_{i=1}^{A} E_{0i} - E_0, \quad \text{其中} A \text{是核内的核子总数.} \tag{5-6-3}$$

与结合能相应的那部分静质量$\Delta m$则称为质量亏损(mass defect)，即

$$\Delta m \equiv \sum_{i=1}^{A} m_i - m, \tag{5-6-4}$$

其中$m$及$m_i$分别是原子核及第$i$个核子的静质量. 质量亏损的存在是静质量不守恒的表现.

有时我们关心的不是原子核而是由若干子体系结合而成的任一体系，或者，虽然讨论的是原子核，但关心的是它分裂为若干个子体系(但不是核子)的问题. 这时有必要把结合能的定义推广. 设体系由$N$个子系结合而成，则该体系"关于这些子系(而不是关于所有核子)"的结合能定义为$\left(\sum_{i=1}^{N} m_i - m\right)c^2$，其中$m$和$m_i$分别是体系和第$i$个子系的静质量. 请注意在谈及体系的结合能时必须明确(至少心中有数)这是关于什么子系的结合能. 例如，设静质量为$m$的原子核分裂为两个子核(静质量分别为$m_1$和$m_2$)，则该原子核关于这两个子核的结合能就等于$(m_1 + m_2 - m)c^2$. 如果笼统地谈到"原子核的结合能"而对子系不加声明时，就是默认每个核子都是一个子系，这时结合能就是$\left(\sum_{i=1}^{A} m_i - m\right)c^2$[即式(5-6-3)].

设静质量为$m$的系统**自动**分裂为两个部分(子系)，静质量和速率依次为$m_1$，$u_1$和$m_2$，$u_2$，则由能量守恒及式(5-4-5)可知

$$mc^2 = \frac{m_1c^2}{\sqrt{1-u_1^2/c^2}} + \frac{m_2c^2}{\sqrt{1-u_2^2/c^2}} > m_1c^2 + m_2c^2, \tag{5-6-5}$$

故

$$(m_1c^2 + m_2c^2) - mc^2 < 0. \tag{5-6-6}$$

可见该体系(关于那两个子系)的结合能为负. 于是得出结论:

**结论1**　能够自动分裂的体系必有负的结合能.

再由"逆否命题"便有如下推论:

**推论1**　结合能为正的体系不会自动分裂(因而是稳定的).

## §5.7　质能动关系式

本节采用国际单位制. 把式(5-1-14)及(5-5-2)重新写成(其中$m$和$\gamma$是$m_0$和$\gamma_u$的简写)

$$\text{(a)}\ \boldsymbol{p} = \gamma m \boldsymbol{u}, \quad \text{(b)}\ E = \gamma mc^2. \tag{5-7-1}$$

以$p$和$u$分别代表$\boldsymbol{p}$和$\boldsymbol{u}$的大小，则上两式结合给出

$$p = \gamma mu = \frac{1}{c^2}Eu. \tag{5-7-2}$$

由式(5-7-1b)得

$$E^2 = \gamma^2 m^2 c^4 = \frac{m^2c^4}{1-u^2/c^2},$$

故 $$m^2c^4 = E^2 - \frac{1}{c^2}E^2u^2. \tag{5-7-3}$$

再利用式(5-7-2)便得

$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$，　或(注意到$E>0$)

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}. \tag{5-7-4}$$

上式称为质点的质能动关系式. 以$mc^2$，$pc$为直角边长作直角三角形，则由式(5-7-4)可知斜边之长就是能量$E$(图5-2). 请注意质点的静质量$m$是不变量，而$pc$及$E$都与参考系有关. 由图5-2不难证明(习题)$\sin\theta = u/c$，所以$\theta$依赖于参考系. 对瞬时静止参考系有$u=0$，故$\sin\theta = 0$，因而$p=0$，$E = mc^2$(静能)，三角形退化为一条水平线段. 选择非瞬时静止参考系就可使$u \neq 0$. 图5-3示出两个不同参

---

①　若干教材中的质量亏损(结合能)定义与本书差一负号，即$E_b \equiv E_0 - \sum_{i=1}^{A} E_{0i}$，文字提法相应地也要把"放出"与"吸收"互换. 这类教材举例: 文献[4]38页、文献[6]410页、文献[7]160页、文献[5]297页. 本书则与多数教材(特别是英美教材)一致.

考系测得的两个三角形,我们看到,在 $p' > p$ 的同时也有$E' > E$.

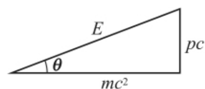



图5-2 质能动三角形.对瞬时静止参考系有 $\theta=0$,三角形退化为水平线段

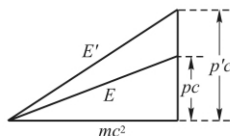



图5-3 不同参考系中的动量和能量

## §5.8 光子及其能量和动量

关于光的本性,物理学家一直存在着微粒说和波动说两种对立观点,前者的代表人物是牛顿,后者的代表人物是惠更斯.由于牛顿的成就和威望,微粒说在17世纪一直占上风.从19世纪开始,杨氏和菲涅耳的卓越工作使人们改而普遍相信波动说.1873年问世的麦氏电磁理论进一步揭示了光的电磁本性,使人们认识到光不但是一种波动,而且就是电磁波.光的微粒说至此几乎销声匿迹.19世纪末叶至20世纪初年,普朗克为了克服黑体辐射研究中的难题而首先提出能量的"量子化"思想,把最小能量单位的携带者称为"量子".爱因斯坦在他发表相对论第一篇文章的同一年(1905年)、同一卷刊物上发表了他关于光电效应的文章(后来为此获诺贝尔奖)①,认为光波的能量集中在一个个以光速运动的微粒上,每个微粒都有一份相同的能量$E$,与光的频率$\nu$有正比关系:$E=h\nu$,其中$h$为普朗克常量.他把这些微粒称为光子②.根据这一思想,光子就是光波的最小微粒,一个频率为$\nu$的单色光束可以看作由大量光子组成的整体,设束中的光子个数为$N$,则该光束的能量就是$Nh\nu$.

光的微粒说和波动说过去一直是两种对立的观点——光要么就是微粒,要么就是波动.然而,从1905年爱因斯坦的光电效应文章开始,人们逐渐认识到光在某些方面更像微粒,在某些方面则更像波动,这就是"波粒二象性"思想的萌芽,后来发展起来的量子力学和量子场论进一步认为波粒二象性是一切基本粒子的共同属性.

在相对论的理论讨论中,光子和质点合称为粒子.光子与质点的重要区别是:① 光子总以光速运动;② 光子的静质量为零[见式(5-4-5)后的讨论].由于光子是一种非常重要的粒子,特别是它与其他粒子(质点)经常发生相互作用(例如康普顿散射就是静止电子对光子的散射),为了确保能量和动量在相互作用中的守恒性,必须认为光子有一定的能量和动量.上面说过,光子的能量$E$最早由爱因斯坦定义,即$E=h\nu$.光子的动量(大小)$p$则可以借它的能量下定义.为此,我们来观察对质点成立的式(5-7-1),它包含的两个等式$\boldsymbol{p}=\gamma m\boldsymbol{u}$和$E=\gamma mc^2$对光子而言失去意义(因为$m=0$,$\gamma=\infty$),但两式结合给出的$p=Eu/c^2$[式(5-7-2)]对光子($u=c$)来说有意义,即$p=E/c$.人们就把此式用作光子动量$p$的定义.总之,光子的能量$E$和动量$p$的公认定义是

$$E\equiv h\nu,\quad p\equiv E/c=h\nu/c,\qquad (5-8-1)$$

其中$\nu$是光子的频率,$h$是普朗克常量.定义是可以人为选择的,重要的是只有选择适当的定义方能保证能量和动量在涉及光子的相互作用中的守恒性.迄今所做的大量实验证明,只要光子的能量和动量按式(5-8-1)定义,能量和动量都是守恒的.

## §5.9 质点为何必须亚光速?

"质点必须亚光速"是狭义相对论中人所共知的基本结论(信条),准确含义是:质点相对于任一惯性系的速率$u$都小于$c$,用几何语言说就是"质点的世界线是类时曲线".但是,为什么有这个结论?一个重要原因是许多公式都含有因子$\gamma\equiv 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$.最早出现$\gamma$的公式是洛伦兹变换式

$$(a)\ t'=\gamma(t-vx/c^2),\ (b)\ x'=\gamma(x-vt),$$
$$(c)\ \gamma\equiv 1/\sqrt{1-v^2/c^2}.\qquad (5-9-1)$$

因为坐标$t$,$x$和$t'$,$x'$都是实数,由上式(a)、(b)可知$\gamma$必为实数,于是由上式(c)立即看出$v$必须小于$c$.这说明任一惯性系的空间坐标原点相对于任何惯性系的运动都必须亚光速,人们第一次尝到极限速率的味道.不过我们要论证的是更强的结论,即

① 爱因斯坦在1905年《物理年鉴》第17卷上发表了三篇重要文章,除了狭义相对论的那篇"论运动物体的电动力学"和关于光电效应的文章外,还有一篇关于布朗运动的文章.是年他才26岁,时任瑞士一个专利局的默默无闻的职员.

② 这当然只是对光子的早期认识.对光子的准确认识和描述必然要用到后来发展起来的量子场论,本书无意涉及.

任何质点（不一定是惯性系的空间坐标原点，也不一定做惯性运动）在任何时刻都亚光速. 这时用洛伦兹变换就力不从心. 注意到 $\gamma$ 也在质点的能量公式（5 – 4 – 5）中出现，就想到还可从能量角度考虑. 质点的能量公式（5 – 4 – 5）也可表为（5 – 5 – 2），即

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \qquad (5-9-2)$$

其中 $E$，$m$ 和 $u$ 分别是质点的能量、（静）质量和速率. 待证命题“质点的世界线是类时线”等价于“质点世界线不含类空和类光线段”. 我们用反证法来证明. 假若世界线上有类空线段，则在该段的任一时刻都有 $u>c$（理由见 §3.3），导致上式右边分母为虚数. 然而质点的能量必须为实数，所以质点世界线不能含有类空线段. 再假若质点世界线上存在类光线段，则该段的任一时刻都有 $u=c$，导致式（5 – 9 – 2）右边分母为零. 分母为零的分数没有意义，但质点的能量总应该有意义，构成矛盾，所以质点世界线也不能含有类光线段. 于是命题得证.

除了借用因子 $\gamma$ 之外，因果关系的讨论也很有助于相信上述命题. 假定质点世界线不是类时线，则它至少含有一个类空（或类光）线段，先设此线段为类空（图 5 – 4）. 在段上任取两点 $p_1$ 和 $p_2$，则它们有类空的时空间隔（即 $I_{12}>0$，见 §3.6）. 任取一个惯性系 $K\equiv\{t,x,y,z\}$，以 $t_1$、$t_2$ 分别代表事件 $p_1$、$p_2$ 在 K 系的时间坐标. 不失一般性，设 $t_1<t_2$，则 K 系认为事件 $p_1$ 早于 $p_2$ 发生. 但是，因为 $I_{12}>0$，由 §3.6 的定理 3 – 2 可知必定存在另一惯性系 $K'\equiv\{t',x',y',z'\}$，它认为 $p_1$ 晚于 $p_2$ 发生（$t'_1>t'_2$）. 而 $p_1$、$p_2$ 作为质点世界线上的两点，总可被看作有因果联系的事件，例如，设质点是子弹，$p_1$ 代表子弹出膛事件，$p_2$ 代表子弹中靶事件，则 $p_1$ 是因，$p_2$ 是果. 然而 K′系竟然认为子弹出膛事件发生在中靶事件之后，造成因果倒置. 可见，只要质点世界线上有一个类空线段，就会破坏因果关系，而这是谁都不能接受的. 以上用反证法证明了质点的世界线不能含有类空线段. 但是，要证明该世界线是类时线还要证明它也不含类光线段. 这时用因果关系显得力不从心，所以还得求助于（刚才讲过的）用能量公式的论证.

注记 2　数年前，意大利国家实验室的奥普拉（OPERA）团队在中微子震荡研究中意外发现中微子竟然超光速. 他们让位于瑞士日内瓦的欧洲核子中心（CERN）发射的中微子束在地下管道中高速前进，最终到达 730 km 外的意大利格兰萨索（Gran Sasso）. 他们在精确测量运动距离和时间后发现中微子的速率竟然比光速略大：中微子比光子少用 60 ns 跑完全程. 消息在 2011 年 9 月 22 日由《自然》杂志网站首次公布后，立即引起全球性的轰动效应. 中微子是静质量非零的粒子（因而是质点而非光子），超光速中微子的存在将动摇相对论的立论根基，因而撼动整个物理学. 世界上大多数物理学家都对这实验结果表示怀疑. 五个月后，美国《科学》杂志网站援引“与实验有关的消息人士”的话报道说，中微子超光速是由 GPS 接收器与电脑之间的光缆连接松动（接触不良）造成的. 可见中微子超光速纯属实验失误，光速作为极限速率的结论不变. 当然，仍有若干项目组（包括 OPERA）正在进行进一步的实验，以期取得更为明确和准确的结果.

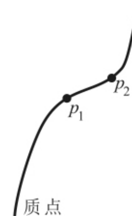



图 5 – 4　质点世界线含类空线段能推出因果矛盾

## 参考文献：


[1] 梁灿彬. 电磁学［M］. 3 版. 北京：高等教育出版社，2012.

[2] 梁灿彬，周彬. 微分几何入门与广义相对论（上册）［M］. 北京：科学出版社，2006.

[3] Adler C G. Does Mass Really Depend on Velocity，Dad?［J］. Am J Phys，1987，55（8）.

[4] 朗道，栗弗席兹. 场论［M］. 袁炳南，译. 北京：人民教育出版社，1948.

[5] 虞福春，郑春开. 电动力学［M］. 北京，北京大学出版社，1992.

[6] 赵凯华，罗蔚茵. 新概念物理教程：力学［M］. 北京：高等教育出版社，1995.

[7] Ugarov V A. Special theory of relativity，1979.（Revised from the 1977 Russian edition）. English translation. Moscow：Mir. Publishers.


（第五讲续完）

《从零学相对论》连载

# 《从零学相对论》连载⑭

梁灿彬[1],曹周键[2]

(1. 北京师范大学 物理系,北京 100875; 2. 中科院 应用数学所,北京 100190)

## 第6讲 广义相对论初步

### §6.1 引力的实质是时空的弯曲

相对性原理要求物理规律在所有惯性系中有相同的数学表达式,用于狭义相对论,就是要求物理规律的数学表达式具有洛伦兹协变性. 这是一个管定律的定律. 因此,在建立狭义相对论物理学时,原则上应该审查已有的物理定律,凡符合这个要求的就仍视之为定律,凡不符合的就要进行改造,直到符合要求方可作为物理定律纳入狭义相对论物理学的框架中. 我们首先来审查麦氏电磁理论. 麦氏方程天生就有洛伦兹协变性(见§1.3),因而可以不经改造地纳入狭义相对论物理学框架. 可以说麦氏方程是狭义相对论的"天之骄子". 再来审查牛顿的运动定律,仅以动量守恒定律为例. 正如§5.1所指出的,牛顿的动量定义 $\boldsymbol{p}\equiv m\boldsymbol{u}$ 使动量守恒不具备洛伦兹协变性,因而必须修改. 只要把动量定义改为

$$\boldsymbol{p}\equiv m\boldsymbol{u}/\sqrt{1-u^2},\text{(其中 } m \text{ 代表静止质量)} \tag{6-1-1}$$

问题便迎刃而解,动量守恒定律便可纳入狭义相对论物理学中. 第三,我们来审查牛顿的万有引力理论. 牛顿引力论的基本方程是反映引力势 $\Phi$ 和质量密度 $\rho$ 的关系的泊松方程

$$\nabla^2\Phi=4\pi\rho, \tag{6-1-2}$$

它有伽利略协变性而没有洛伦兹协变性,因而应该修改. 牛顿的万有引力定律形式上与静电库仑定律很相似,既然麦克斯韦能把静电学推广改造为如此漂亮的麦氏电磁理论,看来牛顿引力论也不难被改造为狭义相对论框架内的引力理论. 然而情况远非如此简单. 关键在于,万有引力定律与库仑定律虽然很相似,却存在"符号差别":电荷有正负两种,同性相斥,异性相吸;质量则只正不负,虽然同性,却只吸不斥(万有引力嘛!)仿照电磁理论,的确可以构造一个在狭义相对论框架内的引力理论,根据这个理论,在引力有变化(有扰动)时将出现类似于电磁波的引力波,而且也以光速传播. 不幸的是,由于上述符号差别,由引力波带走的能量竟是负的. 这意味着系统在发射引力波时自身能量不降反增,从而发射强度变大,由此又会获得更多的能量. 如此循环,必然导致物理上不可接受的后果. 虽然可以通过修改理论来克服这一困难,但又出现新的困难. 事实上,狭义相对论框架内的引力理论远非1个,但每个理论都有其自身问题. 虽然无法绝对否定在狭义相对论框架内建立满意的引力理论的可能性,爱因斯坦还是独辟蹊径,于1915年成功地创立了革命化的、崭新的、突破狭义相对论框架的引力理论,这就是广义相对论. 有趣的是,后人在克服狭义相对论框架内的某种引力理论的困难的努力中,几经修改后所得到的竟然也是与爱因斯坦广义相对论实质相同的理论!

有两个因素促使爱因斯坦创建广义相对论,它们是引力的"普适性(universality)"和马赫原理. 我们只介绍前者. 引力的"普适性"包含两层含义:①任何物体在引力场中都受引力(电中性的物体在电场中却不受电力,故电力无普适性);②引力场中的任何物体,不论其质量、结构和组分如何,只要初始状态(位置和速度)相同,而且除引力外不受力,以后每一时刻的位置和速度就必定一样. 这一结论已被越来越精确的实验所证实,它可以表述为:任意两个质点在引力场的同一点有相同的引力加速度. 这虽然是司空见惯的事实,但为什么会这样?静电场中的两个点电荷就不这样. 设点电荷 $q$ 的质量为 $m$,所在点的静电场强为 $E$,则它所受的电场力为 $f=qE$,获得的加速度为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{f}}{m}=\frac{q}{m}\boldsymbol{E}. \tag{6-1-3}$$

若在同一点放置质量为 $m'$的另一点电荷 $q'$,则其加速度为

$$a'=\frac{q'}{m'}E.$$

$a'$与 $a$ 不等,除非两者的荷质比相同. 在对引力做类似讨论时,不妨也把"荷"与"质"加以区别. 质点的"引力荷"是其物质含量的量度,决定它在引力场中怎样受力,可称为引力质量( gravitational mass) ,记作 $m_G$; 质点的"质"则是其惯性的量度,决定它在力的作用下出现多大的加速度( 对力的响应程度如何) ,可称为惯性质量( inertial mass) ,记作 $m_I$ [即式( 6-1-3) 中的 $m$] [①]. 仿照上述讨论不难导出质点在引力场中的引力加速度为

$$a=\frac{m_G}{m_I}g,$$

其中 $g$ 是该点的引力场强. 如果不同质点有不同的引力荷质比 $m_G/m_I$,它们在引力场中同一点就不会有相同的引力加速度. 然而无数的、一个比一个更精确的实验表明 $m_G/m_I$对任何质点都相同,通过调整引力常量 $G$ 还可使比值为 1 而简写为 $m_G=m_I$. 通常把这一事实称为等效原理( 理由及讨论详见§6.3) . 这是一个极其非同寻常的实验事实,应该引起深思. 引力的"荷"与"质"本是两个完全不同的概念,风马牛不相及,它们为什么相等? 牛顿引力论不能回答这个问题. 在牛顿引力论中,这是作为实验事实( 牛顿理论体系的一个公理) 被承认的. 然而,难道 $m_G=m_I$仅仅是一种巧合吗? 难道就没有更深刻的原因藏在这个事实的背后吗? 难道一定不存在一个更优雅的理论,在这个理论中,$m_G=m_I$是可用推理来证明的吗? 正是对 $m_G=m_I$的思考,加上马赫原理的启发,促使爱因斯坦创立了他的广义相对论.

$m_G=m_I$的事实等价于初始位置和速度相同的、除引力外不受力的任何物体在引力场中都"齐步走". 这种毫无个性的集体行为强烈地暗示着引力是整个时空背景的内禀性质,与所有其他力有着实质性的差别. 物理学是研究物理客体运动( 演化) 规律的学问,物理客体好比演员. 正如演员的表演不能没有舞台一样,物理客体的演化也总是在某种舞台上( 或背景前) 进行的,这个舞台( 背景) 就是时空. 在广义相对论创立之前,人们默认相对论的背景时空是平直的闵氏时空( 见§2.2) . 闵氏时空是如此简单,以至于人们往往不注意( 忘记了) 它的存在. 引力场中的"齐步走"现象引起了爱因斯坦对时空背景的注意. 假如你看演出时发现某个演员的头顶突然下降了 20 cm,你会认为他蹲下了. 然而,假如舞台上所有演员以及桌面、椅面都同时下降了 20 cm,那么最大的可能就是舞台台面由于某种原因下降所致. 类似地,在引力作用下的"齐步走"现象分明强烈地暗示着引力本身是一种纯粹的时空背景效应. 不妨这样猜测: 引力可忽略时,时空是平直的( 闵氏时空) ; 引力不可忽略时( 例如在必须考虑地球或太阳的引力场时) ,时空变得弯曲,弯曲的情况取决于产生引力场的物质分布. 根据这一猜测,引力非常不同于所有其他力,它特殊到这样一种程度,以至于在 4 维语言中它根本就不是什么 4 维力而是时空的弯曲! 根据狭义相对论,每个 3 维力( 记作 $f$) 都对应于一个 4 维力( 记作 $F$) ,而且,$f\neq0$ 当且仅当 $F\neq0$. ( 本书对此并未述及,读者只须承认这一结论. ) 在引力场存在时,谁都承认任何质点都要受到一个称为"引力"的 3 维力( 记作 $f_{引}$) ,但是按照刚才的猜测,这个 3 维力 $f_{引}$竟然并不对应于任何 4 维力 $f_{引}$,就是说,$f_{引}\neq0$ 而 $F_{引}=0$! 这是一种前所未有( 在整个狭义相对论中都没有) 的情况. 可见 $f_{引}$是唯一特殊的 3 维力,它特殊到这种程度,以至于其相应的 4 维力 $F_{引}$竟然为零! 实质上就是: 虽然引力在 3 维语言中表现为一个力 $f_{引}$,但在 4 维语言中它根本不是力而是时空的弯曲. 于是,除引力外不受力的质点就应称为自由质点( 已经自由到不能再自由的程度) . 注意到闵氏时空中自由质点的世界线必为测地线的结论( 见§3.2) ,自然进一步猜测( 假定) 弯曲时空中自由质点的世界线也是( 该时空的) 测地线. 自由质点是最简单的质点,测地线是最简单的世界线,"自由质点的世界线是测地线"的这一假定非常符合美学原则. 可见,引力场的存在不表现为质点受到一个称为"引力"的 4 维力,而是表现为时空的弯曲. 有人问: 既然引力不表现为 4 维力,自由质点在有、无引力场情况下岂非有相同的运动情况? 引力场中的自由质点岂非"白受"了引力? 引力场的影响体现在哪里? 答案是: 引力场的存在导致时空背景的弯曲,而弯曲时空与平直时空有不同的测地线,虽然自由质点都以测地线为世界线,但有无引力场时的测地线不同,所以质点有不同的运动情况. 质点并不是"白受"了引力的. 以上就是广义相对论的

① 我们至今一直在用牛顿引力论. 在牛顿引力论中,引力质量又可分为主动( active) 和被动( passive) 两种,前者指物体作为引力场源时的引力质量,决定它产生引力场的强弱; 后者指物体作为引力场中的试探质点的引力质量,决定它在给定引力场中所受引力的强弱. 正文的引力质量 $m_G$是指被动引力质量.

最基本的假定. 由此出发就可以把 $m_G = m_I$（亦即"齐步走"现象）作为逻辑结论推导出来（可以说现在已经到了水到渠成的一步）. 为了具体和形象，我们以比萨斜塔为例来讨论. 设比萨斜塔顶部的一个铅球和一团棉花被释放而下落，世界线如图 6-1. 如果铅球所受的空气阻力可以忽略，则它可看作自由质点，其世界线 $L_1$ 是测地线. 设棉花团的空气阻力不可忽略，则它不是自由质点，其世界线 $L_2$ 偏离测地线（见图 6-1）. 然而，假如根本没有空气，则 $L_1$ 和 $L_2$ 都是测地线. 如果两者同时以相同的初始状态被下抛，则①初始位置相同（而且同时出发）表明两条世界线都发自同一时空点 $p$；②初始速度相同保证两者在 $p$ 点有相同的切矢（图 6-1 表现的是初速为零的情形），于是由定理 2-1（"一点一矢定一测"）可知测地线 $L_2$ 和 $L_1$ 重合. 这不就是"齐步走"吗? 可见，从广义相对论的上述基本假设出发的确可以把"齐步走"现象（亦即 $m_G = m_I$）作为逻辑结论推出来. 广义相对论正是这样以其特有的优雅方式首次把引力解释为 4 维时空的几何效应（首次把引力与时空几何统一了起来）.

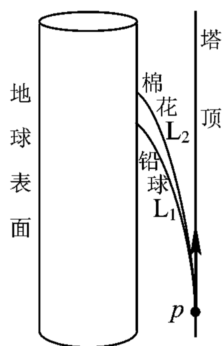



图 6-1　比萨斜塔实验示意图. "地球表面"是指地球表面的世界面. "塔顶"、"棉花"、"铅球"是指它们的世界线

上述讨论清楚地表明，广义相对论是独立于狭义相对论的物理理论，狭义相对论框架内容不下引力. 反之，狭义相对论倒可以被看作广义相对论在引力场足够弱的极限情况，这时弯曲时空近似成为平直时空.

用现代语言来表述，广义相对论的最基本假设可以归纳为以下 3 点.

（a）3 维空间中的引力实质上是 4 维时空的弯曲. 就是说，当引力不可忽略时，时空背景不再是平直时空而是某种弯曲时空. 据此，除引力外不受力的质点自然叫做自由质点.

（b）自由质点的世界线是它所在的那个弯曲时空的测地线.

（c）时空的弯曲情况（由时空线元描述）由物质分布决定，两者的关系由爱因斯坦场方程描述（见 §6.5）.

可以证明，当引力场足够弱、质点速率足够低时，广义相对论力学的计算结果与牛顿力学的结果近似一致. 所以说牛顿力学可以看作广义相对论力学的弱场低速近似（证明详见文献[1] 7.8.2 节）. 然而应该说明，尽管计算结果近似一致，两者看问题的观点却有明显区别. 以树上的苹果落地为例. 按照牛顿力学，这是由于苹果受地球引力而获得加速度，属于非惯性运动. 但是按照广义相对论，苹果并不受到任何 4 维力（引力不对应于一个 4 维力），所以是自由质点. 地球的影响在于使时空变得弯曲，苹果的世界线是这个弯曲了的时空中的一条测地线. 就是说，同是苹果落地的运动，牛顿理论认为它有（3 维）加速度（相对于惯性系），而广义相对论认为它没有（4 维）加速度.（简单地说，存在着与 $f = ma$ 类似的 4 维等式 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{A}$，所以 4 维力 $\boldsymbol{F}$ 为零导致 4 维加速度 $\boldsymbol{A}$ 为零.）反之，设苹果静止于地面，牛顿理论认为它所受的地球引力被地面的支撑力 $f_{支}$ 所抵消，因此保持静止，其（3 维）加速度为零，处于惯性运动状态；而广义相对论则认为它只受到一个 4 维力（与支撑力 $f_{支}$ 相应的 4 维支撑力 $\boldsymbol{F}_{支}$），因此其世界线不是测地线，其（4 维）加速度不为零. 读者是否已经意识到，当你舒适地坐着阅读本书的时候，你的世界线并不重合于因地球的存在而弯曲了的时空的测地线，你的 4 维加速度不为零，因而你并不处于最自然（最简单）的运动状态? 另一个例子是地球绕太阳的公转. 按照牛顿力学，这是地球在太阳引力（充当向心力）的驱使下所做的加速运动（3 维加速度非零）；而广义相对论则认为地球并不受到任何 4 维力，太阳对地球运动的影响只体现为使时空变得弯曲，地球始终沿着这个弯曲时空的一条最简单曲线——测地线（绕太阳世界面的螺旋线）——做最自然的运动，根本没有（4 维）加速度.

把引力的实质归结为时空的弯曲的这一认识是人类智慧的一个伟大胜利. 黎曼（Riemann）在年仅 28 岁时（1854 年）就提出了（内禀）曲率（又称黎曼曲率）的概念和计算方法，并在逝世（年仅 40 岁）前的一段时间内致力于寻求把电力和引力统一起来的某种理论. 这一努力未获成功的最重要原因就是他只专注于空间及其曲率而没有注意 4 维时空及其曲率. 直至 1905 年狭义相对论问世之后，时间和空间

才被同等看待.(实际上,直到1908年闵可夫斯基才首次明确地提出时空这一绝对概念.)再过几年后,“引力的实质是时空的曲率”这一划时代认识才伴随着爱因斯坦对广义相对论的构思而逐渐建立了起来.

在爱因斯坦创立广义相对论的思考过程中,除了深受马赫思想的影响和启发之外,还有两个人功不可没,值得一提.第一个人是闵可夫斯基,如果没有他首创的4维时空这一绝对的概念,就不可能有后来的广义相对论(见§3.7末);第二个人是格罗斯曼(Grossmann),他是爱因斯坦在苏黎世理工学院的老同学,后来成为该学院的数学教授,爱因斯坦是在格罗斯曼的帮助下学会黎曼几何并以此为数学工具创建了广义相对论的.

## §6.2 弯曲时空的物理定律

广义相对论认为一切物理现象不过是物理客体在某种弯曲时空中的演化.因此,用广义相对论研究物理,首先就要找出各种物理客体(质点、理想流体、电磁场……等)在给定的弯曲时空背景上的演化方程.由于实际生活和实验室中的引力场太弱,广义相对论同牛顿引力论的区别一般难以察觉,想通过观测或实验来归纳出弯曲时空的物理定律是没有指望的.我们能够做到的只是:根据某些基本原则,用假设的手法“猜出”弯曲时空中的各种物理定律,其正确性则有待于由它推出的各种结论的自洽性及其与实验(如果可能进行的话)结果的一致性来验证.这种“猜测”有两个重要依据(不妨称之为两根“拐棍”).第一个依据就是广义协变性原理(principle of general covariance),这其实是一个假设,是爱因斯坦在创立广义相对论的过程中提出的,它的实质性内容就是弯曲时空中所有坐标系都是平权的,因而物理定律的数学表达式在任意坐标变换下形式不变.第二个依据有两种提法,多数教材的提法是“等效原理”(详见§6.3),少数教材的提法是“当时空几何是闵氏几何时,物理定律应回到狭义相对论的相应定律”(详见文献[4]、文献[1]).由于本书连狭义相对论的许多物理定律都没有给出定量表达式,所以对此只能点到为止,无意展开.想知道弯曲时空各种物理定律的定量表达式的读者可以参阅文献[1]§7.2.

谁都知道相对论的基本假设是光速不变原理,并记住其内涵是“光速为$c(=3\times10^8\,\mathrm{m/s})$”(此处的“光速”一律指真空光速),于是自然会问“广义相对论(弯曲时空中)的光速也是$c$吗?”.笔者对此的回答是:速率代表单位时间所走的距离,而时间和距离都同坐标系有关,所以只记住“光速为$c$”有可能导致误解,应该记住的是“惯性系中的光速为$c$”.(光速相对于非惯性系很可以不等于$c$,§3.3的例1就是一例).闵氏时空中存在着一类特殊的、优越的、与众不同的坐标系,即(整体)惯性系,用3维语言讨论狭义相对论问题时除特殊情况外都选择惯性坐标系,谈到光速时自然就暗指相对于惯性系的光速.然而弯曲时空中任何一个坐标系都不比其他坐标系更优越(这正是广义协变性原理的实质性内涵),所以你只能任选一个坐标系来定义光速(虽然在某些具体场合下你会觉得你所选的坐标系最恰当),其结果自然是千变万化的,不但可以不等于$c$,而且完全可以大于$c$.因此这种“坐标光速”其实是用处不大的.“光子速率”和“质点速率”的实质性问题最好用4维语言表述,这就是光子和质点的世界线问题.请回忆§3.3中关于极限速率的讨论,当时曾将狭义相对论的两个基本“信条”分别用3维和4维语言表出,复习如下.

3维语言表述:

(A) 光子相对于任何惯性系的速率$u=1$;

(B) 质点相对于任何惯性系的速率$u<1$.

4维语言表述:

(a) 光子的世界线是(闵氏时空的)类光曲线;

(b) 质点的世界线是(闵氏时空的)类时曲线.

3维表述必然涉及惯性系,而惯性系是闵氏时空特有的坐标系,弯曲时空中不存在(整体)惯性系,所以无法将3维表述(A)、(B)直接推广到弯曲时空.然而4维表述(a)、(b)却可以方便地推广,为此只须将括号中的“闵氏时空”改为“弯曲时空”,就是说,我们默认广义相对论要遵守以下两个基本信条:

$(\tilde{a})$ 光子的世界线是(所论弯曲时空的)类光曲线;

$(\tilde{b})$ 质点的世界线是(所论弯曲时空的)类时曲线.

刚才已经指出弯曲时空的“坐标光速”用处不大.反之,4维表述“光子世界线是类光曲线”却可以准确地告诉你光子在弯曲时空中的运动情况.所以我们真诚地奉劝读者,在涉及光在弯曲时空的传播问题时,除了极少数特殊情况之外,不要再去津津乐道地大谈特谈坐标光速了,拿起最简洁、清晰而又保

险的4维工具,从"光子世界线是类光曲线"出发吧.

在此我们还想顺便指出,不少人在弯曲时空背景中讨论问题时,总爱或明或暗地用到惯性系这一概念,殊不知在弯曲时空中不存在(整体)惯性系.弯曲时空中倒是存在许多局域惯性系,而且与闵氏时空的整体惯性系有某些类似之处(见§6.4),但两者之间毕竟存在着许多区别.不注意这些区别有时就会导致误解甚至错误.一个常见的例子是以为弯曲时空中局域惯性系的坐标光速等于 $c$,其实这是一种误解.

## §6.3　等效原理

对经验定律 $m_G = m_I$ 的深刻思考是爱因斯坦创立广义相对论的重要动机.为了帮助理解,我们先介绍爱因斯坦根据牛顿力学借用电梯构思的一个思想实验,即爱因斯坦电梯实验.设电梯因缆绳断裂而自由下落,其内部观者便有失重的感觉.如果他放下手中的苹果,便会发现它不像平常那样离手下落,而是处于随遇平衡状态之中.理由非常简单:电梯观者相对于惯性系(地球系)有重力加速度 $g$,所以是一个非惯性观者(也可说电梯是个非惯性参考系),故他认为苹果除了受到重力之外还受到一个惯性力.设苹果的引力质量和惯性质量分别为 $m_G$ 和 $m_I$,则它所受的重力为 $m_G g$(此处 $g$ 作为重力场强),所受的惯性力为 $-m_I g$(此处 $g$ 作为非惯性系的加速度).因为 $m_G = m_I$(这是关键),所以合力为零,因而苹果随遇平衡,或说处于失重状态.假如电梯观者是个有经验的宇航员,他将觉得这苹果与远离各星球(因而引力可以忽略)的、做惯性运动的飞船内的苹果有相同表现.推而广之,由于 $m_G = m_I$,根据牛顿力学,自由下落电梯内部的一切力学实验都与远离星球的惯性飞船内的相应实验结果相同,因此把 $m_G = m_I$ 称为等效原理.由于广义相对论尚在构思过程中,以上是纯用牛顿力学得到的结论.

在构思广义相对论的过程中,爱因斯坦又大胆地、假设性地把这一原理从力学实验推广到一切物理实验,即假设自由下落电梯内的一切物理实验都与远离星球(因而时空平直)的惯性飞船内的实验结果一样,并由此推出光的引力红移、光在引力场中走曲线等重要而有趣的结论.为了区分清楚,后人把 $m_G = m_I$ 相应的原理称为弱等效原理(weak equivalence principle,即WEP),把爱因斯坦推广后的等效原理称为爱因斯坦等效原理(Einstein equivalence principle,即EEP),此外还有一个强等效原理(见后).

现在介绍如何从爱因斯坦等效原理推出光在引力场中走曲线的结论.设自由下落电梯的左墙中心A有一光源向右墙发光(图6-2).根据爱因斯坦等效原理,电梯内的一切物理实验都与远离星球的惯性飞船内的相应实验有相同结果,而惯性飞船内的光线是直进的,所以电梯观者也应看到光走直线,因而将打在右墙的正中心B.然而,对地面系而言,在光从左墙走到右墙的时间内电梯已下落了一段距离(而且是匀加速地下落),所以光的轨迹是从图6-2的A点到B′点的一段抛物线(电梯观者认为B′和B是同一空间点).另一方面,地面系认为电梯及光线是处在引力场中,于是得出光在引力场中走曲线的结论.反之,电梯系认为所有物体都失重("引力场消失了"),光走直线是很自然的.

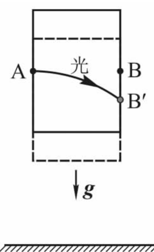



图6-2　用爱因斯坦电梯说明光在引力场中走曲线

除了利用自由下落电梯之外,人们也常用下面的方式描述弱等效原理 $m_G = m_I$.设飞船在远离星球的空间做匀加速运动(非惯性运动),相对于惯性系的加速度为 $a$(不妨设 $a$ 等于地面的重力如速度),见图6-3.设苹果的质量为 $m$,则船内观者(非惯性观者)将看到离手的苹果在惯性力 $-ma$ 的作用下做反向加速运动,就像地球表面被释放的苹果在重力作用下的自由下落运动那样.进一步也不难相信,只要飞船加速度 $a$ 等于地面重力加速度 $g$,飞船内的一切力学实验就都与地面附近的相应实验结果相同,这可以看作弱等效原理的另一表述.据此,人们又常说"加速飞船内的宇航员发现自己置身于引力场中","加速度与引力场等效".对这两句话应有正确理解.根据第一句话,爱思考的初学者常会提出这样的问题:既然加速飞船内的宇航员感到有引力,而引力就是时空的曲率,船内宇航员岂非觉得自己置身于弯曲时空中?答案当然是否定的:因为早已约定飞船远离各星球,它所在的时空必然(近似)平直,而时空曲率是绝对的,谁看都一样,决不能得出

“加速宇航员觉得时空弯曲而惯性观者觉得时空平直”这样一个荒唐的结论. 导致上述错误结论的关键在于推理过程中两次用到引力一词,而两次含义不同(犯了“偷换概念”的逻辑错误). 加速宇航员所感到的“引力”其实只是非真实的表观引力,它不由物质产生(在这一点上与真引力根本不同),不对应于时空弯曲(在这一点上也与真引力根本不同),只因加速宇航员的感觉而得名. 可见,对于“加速度与引力场等效”一类的提法应该格外小心,必须清醒地知道与加速度等效的“引力”只是表观引力(假引力)而不是真引力. 根据笔者所见,与此类似的错误实在是屡见不鲜,可以说是在对广义相对论半懂不懂的知识人群中的常见病和多发病.

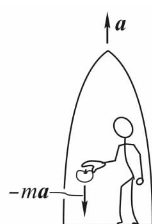



图6-3 远离星球的匀加速飞船. 船内观者发现苹果“自由下落”

爱因斯坦的等效原理对广义相对论的创立无疑起到过重要作用. 然而,在有了广义相对论之后,人们逐渐发现爱因斯坦等效原理可以从广义相对论的理论推出(见文献[1]). 关于等效原理的含义、地位和作用,不同学者有不同看法. 下面列举两种有代表性的极端看法,双方都是国际上非常杰出的相对论学家. 大力推崇等效原理的是密斯纳(Misner),索恩(Thorne)和惠勒(Wheeler),他们在合著的书(文献[2] P. 386)中说“等效原理功能强大,用它可把狭义相对论的所有物理定律推广到弯曲时空.”. 而辛格(Synge)对等效原理则持极端相反的观点,他在书(文献[3])的序言中写道“我从未懂过这一原理. ……它意味着引力场的效应与一个观者的加速度的效应不可分辨吗? 如果这样,那是错的. 在爱因斯坦理论中,要么存在一个引力场,要么不存在,取决于黎曼张量是否为零. 这是一个绝对的性质,与任何观者的世界线都毫无关系. 时空要么平直,要么弯曲,在本书的若干地方我都不得不煞费苦心地把由时空曲率导致的真空引力效应与那么些由观者世界线的弯曲导致的效应区分开来(在多数通常情况下以后者为主). 等效原理在广义相对论的诞生过程中实质上起着接生婆的作用,……我建议我们以适当的荣誉埋葬掉这位接生婆而正视绝对时空这一事实.”对等效原理的这一看法也许偏激,但上引段子中的一些提法不失为防止误解的清醒剂. 例如,他关于分清由时空弯曲导致的真引力与平直时空中由于观者世界线的弯曲(非测地线)导致的表观(假)引力的警告就是十分必要的. 我们衷心地希望他所煞费的苦心没有白费,希望有更多读者从此对分清真假引力的重要性留下深刻印象.

下面简述笔者对等效原理的肤浅认识. 第一,爱因斯坦等效原理是爱因斯坦在酝酿广义相对论的过程中对弱等效原理的假设性推广,对广义相对论的诞生起过重要的“接生婆”作用. 这是连辛格也同意的. 第二,§6.2讲过,等效原理是从闵氏时空的物理定律“猜出”弯曲时空的物理定律的两个重要依据(拐棍)中的一个(另一个是广义协变性原理),因此可以说等效原理是“由狭义相对论通往广义相对论的桥梁”. 不过,正如§6.2所说,也可不用等效原理而改用“当线元为闵氏时回得去狭义相对论的相应定律”,同样可从闵氏时空的定律“猜出”弯曲时空的相应定律. 而一旦接受这些定律(从而建立起广义相对论),讨论问题时原则上就可以完全不用等效原理(虽然许多作者在许多问题上喜欢用等效原理). 因此,从这个角度来看,“埋葬掉接生婆”对广义相对论似乎没有实质性影响. 第三,对于某些较为复杂的情况,“等效原理是否被违反”是长期以来有争论的问题. 这里的关键问题是等效原理在这些具体情况下的准确含义尚待澄清. 据笔者所知,不同作者对等效原理有不同的表述方式,但似乎很难说有哪一种方式是百分之百地清晰明确的. 在这个意义上,辛格说“我从未懂过这一原理”也许未必过分. 第四,文献中存在着许许多多互不相同的引力理论(广义相对论只是其中之一,详见文献[5]),所有引力理论可以分为两大类,即度规理论和非度规理论. 度规是一个张量,选定坐标系后就可表为一个线元,其中各项的系数就是度规张量在该坐标系的分量.(本书出现的各种线元其实代表各种度规张量,只因不想讲张量而一直避开度规、使用线元.)在广义相对论中,时空就是某个背景空间上配以适当的线元(度规),所以广义相对论是当然的度规理论. 此外还有许多种度规理论,包括著名的、很有竞争力的布兰斯-迪克(Brans-Dicke)理论.(以下简称布-迪理论). 判断哪种引力理论是正确理论的标准当然是实验. 为此需要一个关于引力实验的理论,迪克(Dicke)从20世纪60年代开始从事这种理论的研究,他的开创性工作使人们对等效原理及其意义的

理解逐渐加深，并终于意识到应把等效原理摆在考察引力理论（而不只是限于广义相对论）的基础这一重要位置上. 等效原理可分为 3 个层次，即弱等效原理（weak equivalence principle，即 WEP）、爱因斯坦等效原理（Einstein equivalence principle，即 EEP），和强等效原理（strong equivalence principle，即 SEP），SEP 与 EEP 的区别在于：EEP（及 WEP）只考虑系统（如电梯）所处的外引力场而不考虑系统中的物体所激发的自引力场，即在引力上只考虑它们的被动方面而忽略其主动方面，而 SEP 对主动、被动方面都做考虑，讨论对象是"自引力系统"，大到恒星内部的自引力，小到卡文迪许实验（测量引力常数 $G$）中两个铅球间的引力都在考虑之列. EEP 可以看作 SEP 在自引力可忽略情况下的特例. 这 3 个等效原理的实验检验对选择（淘汰）引力理论有重要意义. 任何引力理论都服从 WEP（因为有越来越精密的实验证实 WEP，无人愿意创造一个不服从 WEP 的引力理论），但对 EEP 和 SEP 则不然. 讨论表明（见文献 [5]、文献 [6]），如果 EEP 成立，则只有度规理论才可能正确. 这就表明，如果有越来越精密的实验证实 EEP，那么非度规理论就将越来越没有立锥之地（事实上已经如此）. 进一步的讨论还表明（见文献 [4]、文献 [5]），广义相对论满足 SEP 而所有其他已知的度规理论（包括布-迪理论）都不满足. [可惜这一讨论还不等于完全严格的证明，因此上述结论至今仍被称为猜想（conjecture）. 但至少可以肯定地说，除广义相对论外的多数度规理论不满足 SEP.] 所以，如果有越来越精密的实验证实 SEP，那么广义相对论很可能就是唯一正确的引力理论. 可见 3 个等效原理的实验检验有着非常重要的理论意义，这些实验正以越来越高的精度在不断进行中（可参阅 §8.5 后半部分）.

（第 6 讲未完，待续）

（上接 53 页）

## Trajectory of intersected rolling discs

TAO tao, REN Yan-jie, QIU Wei-gang

(School of Science, Huzhou Teachers College, Huzhou, Zhejiang 313000, China)

**Abstract:** Two symmetric intersected discs roll without slipping on a plane. The coordinates of center of mass and the rotation matrix are given. The relation of space period and intersected angle is discussed. The trajectories of contact point and midpoint of intersected segment are plotted.

**Key words:** discs; trajectory

（上接 58 页）

## Experimental Research on "Half-wave Loss"

HUANG Kun[1], JI Chang-yin[2], SHI Qing-fan[2]

(1. School of Automation, Beijing Institute of Technology, Bejing 100081, China;

2. School of physics, Bejing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract:** The "half-wave loss" phenomenon is directly shown by changing the interface medium and obtaining the "light and dark" interference fringes. Based on the deduced distribution equation of interference pattern and the experimental data, we analyze quantitatively this phenomenon according to the calculation of the additional optical path difference produced by reflections on different medium surface. Moreover, the "half-wave loss" phenomenon is illustrated from another point of view by simulating the experimental results in the light of distribution equation of interference pattern.

**Key words:** half-wave loss; experimental research; computer simulation

《从零学相对论》连载

# 《从零学相对论》连载⑮

梁灿彬[1],曹周键[2]

(1. 北京师范大学 物理系,北京 100875; 2. 中科院 应用数学所,北京 100190)

## §6.4 潮汐力与测地偏离

上节从牛顿力学推出一个结论: 自由下落电梯内的一切力学实验都与远离星球的惯性飞船内的相应实验结果相同. 本节的要旨在于说明,由于地球引力场的非均匀性(离地心越远引力越弱),这一结论其实只能近似成立,就是说,电梯内的一个足够精确的力学实验与惯性飞船中的同样实验的结果并不完全相同. 先用一个理想实验揭示这一问题.

在自由下落电梯内用8个小球摆成一个圆形花样(圆平面与地面垂直),如图6-4左. 先用牛顿力学讨论. 设球1,2连线的延长线正好过地球中心,开始时各球相对静止. 由于地球的引力场强在球1处比球2处略大,球1的重力加速度就略大于球2,于是两者的距离渐增,站在球1的立场就会觉得球2与自己渐行渐远. 另一方面,球3及4与地心的连线与竖直方向略有偏离(但两球的偏离方向相反),于是球3,4的距离渐减. 一段时间后的整个花样将变成图6-4右的卵形. 然而,如果无引力地区的惯性飞船内也用8个小球摆成圆形花样,而且开始时各球之间相对静止,则球1不会发现球2与自己的距离有任何变化,整个花样一直保持圆形. 可见,即使就力学实验而言,电梯与飞船也并非完全等效.

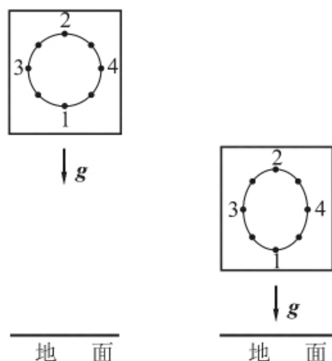
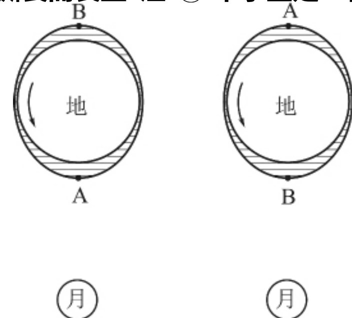



图6-4 电梯内小球花样在自由下落中变形

以上是假想实验,但道理与此类似的现象却不难在日常生活中找到,海水的潮汐现象就是一例. 下面是用牛顿力学对这一现象所做的简化分析,旨在突出本质. 潮汐现象的主要起因是月球("罪魁祸首"),其次才是太阳. 忽略太阳的影响可使问题简化而不影响对实质的理解. 地球,作为一个物体,处于月球的引力场中. 假定地球表面被一层海水覆盖,考虑水面上的A,B两点,其连线经过地心(图6-5). 设某一时刻A点离月球最近,则B点离月球最远. 月球在A,B两点的引力场强(大小)不同,两点就要相互远离,于是A,B附近的水面向外鼓起[图6-5(a)]①. 随着地球的自转,A点不再正对月球,水面高度降低. 地球自转半周后,A点离月球最远[图6-5(b)],水面再度鼓起. 这就解释了海水为什么每天两度涨潮两度退潮. 这种"潮汐现象"其实也不限于海水. 对地面附近自由下落的人(蹦极运动者)来说,头顶和脚底与地心距离不同,也存在着把人拉长的力(只考虑地球引力场),不过这种"潮汐力"很小,不会造成任何感觉. 但是,如果你在中子星表面附近自由下落,潮汐力可以大到$10^{11}$ N(牛顿)的程度,你将被撕裂而丧生. 注: ① 中子星是一种主要由




(a) 自转半周前 (b) 自转半周后

图6-5 潮汐现象示意

(地球自转半周前后)

① 从地球观者看来,A点鼓起的原因是两个力的合力: (a) 月球引力,(b) 地球绕地月共同质心做圆周运动导致的惯性离心力. 两力的合力叫生潮力(或起潮力).

中子组成的、密度高达水密度的 $10^{14}$ 倍(!) 的致密星体,高密度导致表面引力场强的变化率奇大( 见7.2.3 节) . ② 按照估算,人体能经受的临界压力或拉力( 超过此限则人体破裂) 约为 $10^7$ N/m$^2$.

以上讨论说明地球和月球引力场中的自由下落物体都要受到潮汐力. 其实潮汐现象是引力场的普遍性质. 应该指出,至此我们一直在用牛顿引力论,而且已经感觉到引力场的非均匀性是潮汐现象的根源. 既然牛顿引力论是广义相对论在弱引力场条件下的近似,可以预期,潮汐现象也应该是广义相对论的一种效应. 于是不免要问: 在广义相对论范畴内,潮汐现象的根源又是什么?

我们早已知道,① 根据广义相对论,3 维空间中测得的引力其实是 4 维时空的弯曲; ② 自由质点在弯曲时空中的世界线是该时空的类时测地线. 由此可知,图 6 -4 中 8 个自由下落小球的世界线必定是因地球存在而弯曲了的时空中的 8 条类时测地线,图 6 -6 示出其中的两条( 图 6 -4 的小球 1 和2) . 计算发现,由于时空曲率非零,两线之间的空间距离( 即球 1 和 2 的距离) 会随着时间而加速增大( 与牛顿力学结论一致) ,在广义相对论中称此现象为"测地偏离"( geodesic deviation) ,由一个方程定量描述( 称为测地偏离方程) ,该方程左边代表两线距离加速增大的加速度( 称为潮汐加速度) ,右边则涉及时空曲率( 黎曼张量) . 在时空曲率点点为零的情况下( 平直时空) ,方程右边为零,故左边的潮汐加速度也为零,所以平直时空( 亦即无引力场时) 不存在潮汐现象. 反之,从测地偏离方程可以证明,只要时空曲率非零,就总可找到这样两个自由下落的相邻质点( 两条类时测地线) ,它们之间的潮汐加速度非零. 可见,从广义相对论的角度看来,潮汐现象的"罪魁祸首"( 根源) 就是时空曲率: 当且仅当时空曲率非零时存在潮汐效应.

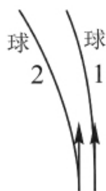



图 6 -6 地球附近自由下落小球( 存在测地偏离,即潮汐效应)

特别值得强调的是,虽然自由下落电梯内的观者会感到物体失重( 似乎消除了引力场) ,但是电梯内 8 个小球的假想实验表明由引力场导致的潮汐效应是无法消除的. ( 因为曲率是绝对的,不因参考系或坐标系的改变而改变,所以不可能通过选用电梯系来消除潮汐效应. ) 从广义相对论的角度看来,选择自由下落电梯无非是选择了与电梯观者相应的一个坐标系( 称为局域惯性系) ,虽然引力效应在此系中得以表观地消除( 感到失重) ,但是,时空曲率是个绝对量( "硬邦邦"的张量) ,是不可能通过任何坐标变换消除的( 无人能选择一个坐标系使得非零张量在该系的全部分量为零) ,它通过潮汐效应顽强地表现自己. 因此,在学习和讲解等效原理的时候,不应忽视( 相反地,应该强调) 潮汐现象. 爱因斯坦是在 1912 年意识到潮汐力的实质是时空曲率的,尽管他当时的理解还很不清晰、不准确. 毕竟那时广义相对论尚未建立起来.

**小结** 牛顿引力论和广义相对论都是关于引力的理论. 在这两种理论中都存在潮汐效应. 牛顿引力论认为潮汐效应的根源是引力场的非均匀性; 广义相对论认为潮汐效应的根源是时空曲率.

严格说来,自由下落观者的失重感( 感到引力被"消除") 只发生在该观者身上,只要离开他的世界线就会观察到潮汐现象. 偏偏做实验时往往要涉及观者世界线周围的一个小的时空区域( 例如图6 -7) ,于是"失重"问题就变得不那么简单. 幸好时空曲率的效应只有在足够大的时空范围内才会有所显示( 被实验测出) ,只要实验涉及的时空区域足够小( 对电梯而言,只要其空间尺度及下落时间足够小) ,实验结果便与平直时空的相应实验近似地不可区分. 这同以下的简单例子类似: 2 维球面上每点的曲率张量都不为零,但若只关心某点附近一小片球面 $\Delta S$ 的情况,就不妨用该点的切平面的一小部分 $\overline{\Delta S}$ 近似代替( 见图 6 -8) . 例如,为测定地球两条经线在北极的夹角,不妨把每经线的一个段看作直线. 在任意弯曲时空中,如果只关心某个时空点的一个足够小的领域,就可近似使用狭义相对论物理定律. 这也可看作是等效原理的某种提法.

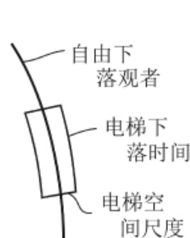



图 6 -7 电梯观者做实验涉及的时空邻域

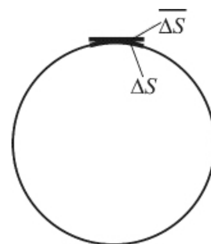



图 6 -8 一小片球面可用切平面的一小部分代替

[选读 6－1]

甲　我对均匀引力场一直存在一个问题. 一方面，根据牛顿引力论，均匀引力场不存在潮汐效应；另一方面，广义相对论认为只要有引力就有时空曲率，根据正文的讲法，就必定有潮汐效应. 于是我要问：均匀引力场中到底有没有潮汐效应？

乙　"均匀引力场"一词在牛顿引力论中意义明确（引力场强为常矢量），但在广义相对论中尚未定义. 只有先下定义方可讨论你的问题.

甲　想来想去，我觉得比较合理的定义是：如果任意两个自由下落的相邻质点之间都没有潮汐加速度，所在的引力场就称为均匀引力场.

乙　但是，按照这一定义，广义相对论中根本就不存在均匀引力场，因为有引力场就有时空曲率，就必然有潮汐效应.

甲　然而在牛顿引力论中是有均匀引力场的. 例如，我们熟知均匀带电无限平面两侧有均匀静电场，由牛顿万有引力定律与库仑定律的形式相似性可知有均匀质量密度的无限平面两侧应有均匀引力场. 难道广义相对论不认为这是均匀引力场吗？

乙　按照你刚才下的定义，它当然不是均匀引力场. 事实上，这个例子在广义相对论中是这样一个时空，其几何由一个称为 Taub 线元的弯曲线元描述，线元在有均匀质量密度的无限平面上存在奇性（见文献[1] §8.6）. 完全可以从这一线元出发用计算证明它有潮汐效应.

[选读 6－1 完]

## §6.5　爱因斯坦场方程

牛顿力学认为引力场由物质分布产生，由引力势 $\Phi$ 描述，它与物质的质量密度 $\rho$ 的联系体现在泊松方程

$$\nabla^2\Phi = 4\pi\rho \qquad (6-5-1)$$

之中. 广义相对论对引力的看法虽然与牛顿力学很不相同，但同样认为引力由物质分布产生. 既然引力是时空弯曲的体现，就应该存在一个把时空曲率与物质分布联系起来的关系式. 爱因斯坦经过几年努力，终于找到这一公式，后来称为爱因斯坦场方程（是广义相对论的另一重要假设），是一个相当复杂的张量方程. 由于本书不讲张量，此处只能把这一方程半定性地表为

$$\text{爱因斯坦张量} = 8\pi \times \text{物质的能量、动量密度及应力张量}. \qquad (6-5-2)$$

其中"爱因斯坦张量"是由黎曼张量派生出来的张量，也反映时空的弯曲情况. 上式表明，不但物质场的能量密度，而且它的动量密度以及应力张量也对时空弯曲（因而对引力场）提供贡献.

首先可以提出这样一个问题：平直时空的曲率（黎曼张量）点点为零，导致爱因斯坦张量为零，于是方程（6－5－2）意味着物质的能量、动量密度及应力张量都为零，也就是根本不存在物质. 然而，平直时空是狭义相对论的背景时空，难道狭义相对论根本不涉及物质？物理学是研究物质运动（演化）规律的学问，没有物质还有物理吗？这个表面上的矛盾是由物理学中的近似处理方式带来的. 实际上，狭义相对论研究各种物体和场的运动及其相互作用，单单忽略它们之间的引力作用，亦即忽略所有这些物质产生的引力场. 如果引力不能忽略，时空就不平直，就超出了狭义相对论的范畴，就必须使用广义相对论. 我们生活在一个充满物质的宇宙中，整个宇宙（看作一个无所不包的最大的 4 维时空）或其中任一部分都是弯曲时空. 只当我们所关心的是远离各大星体（因而引力场足够弱）的区域时才可以近似地使用狭义相对论. 可见，虽然狭义相对论本身在理论上非常严密准确，它也不过是一个理论模型，一旦用于客体就必然出现近似性. 不是理论本身有近似性，而是这一理论只近似地适用于所涉及的客体.

根据"线元决定几何"的提法（见 §2.1），时空的所有几何性质（包括黎曼张量和爱因斯坦张量）都由该时空的线元决定. 所谓求解爱因斯坦方程，其实就是要找到某一线元，使得由它决定的爱因斯坦张量正好等于方程（6－5－2）右边的张量.

虽然我们生活在无所不包的宇宙时空中，但往往只关心其中的某一局部时空区域. 如果区域中没有任何物质（真空区域），爱因斯坦方程（6－5－2）的右边就等于零，方程就简化为

$$\text{爱因斯坦张量} = 0 \qquad (6-5-3)$$

（请注意爱因斯坦张量为零不意味着黎曼张量为零.）上式称为真空爱因斯坦方程. 例如，天文学家常常关心某一恒星（尤其是太阳）周围的情况. 由于其他天体与该恒星（记作 H）相距甚远，通常可以采用孤立体系模型，即认为除此恒星外一无所有——恒星 H 是真空中的孤立物体. 从广义相对论的角度说，应该关心由该恒星的物质分布造成的星外真空区域的时空弯曲情况. 定量地说，就是希望求解爱因斯坦方程以得到星外时空的线元表达式. 取定坐标系后，张量方程就等价于一组分量方程，构成关于待求量（时空线元）的偏微分方程组，如能求解，便可

得到待求线元. 然而这是一个高度非线性的偏微分方程组(可被列为宇宙中的极端非线性现象之一),求解通常非常困难. 幸好物理学家有自己的高招:充分利用物理问题本身的各种对称性. 外部时空的弯曲是由恒星造成的,恒星自身的对称性也就决定了外部时空线元的对称性. 我们所关心的恒星有两个对称性: ① 球对称性; ② 静态性,是指恒星(在很长的时间内)的恒定不变性①. 这两者就导致外部时空线元既有球对称性又有静态性(通俗地说,线元的静态性就是其各项的系数不随时间而变). 利用线元的这两个对称性可使真空爱因斯坦方程(6-5-3)大为简化. 史瓦西(Schwarzschild)在爱因斯坦方程发表后不到一个月就求得了这个解,其线元在"球坐标系"$\{t,r,\theta,\varphi\}$的表达式为

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2), \qquad (6-5-4)$$

其中$M$是常数,代表恒星的质量. 后人称上式为史瓦西真空解(Schwarzschild vacuum solution),称史瓦西所用的坐标系$\{t,r,\theta,\varphi\}$为史瓦西坐标系. 上式是史瓦西真空解在几何单位制的表达式. 几何制在涉及引力时除了令$c=1$外还令引力常数$G=1$,于是公式大为简化. 史瓦西真空解在国际制的表达式则要复杂得多,见式(8-1-1′).

当$M=0$时,上式归结为

$$ds^2 = -dt^2+dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2), \qquad (6-5-5)$$

这无非是闵氏线元在球坐标系$\{t,r,\theta,\varphi\}$的表达式. 这是很自然的,因为$M=0$意味着恒星根本不存在,时空当然平直.

史瓦西是20世纪最有名的德国天体物理学家之一. 爱因斯坦方程发表时(1915年11月)正值第一次世界大战,那时史瓦西正在对俄战争前线的德军服役,他是一名志愿入伍的爱国者. 当他在《普鲁士科学院会议报告》中读到爱因斯坦的广义相对论时,寻求爱因斯坦方程解的强烈欲望使他在几天之内就求得了静态球对称真空解(即史瓦西真空解). 爱因斯坦收到史瓦西的论文时大喜过望,回信说:"我没有预料到能得出方程的精确解②,您对问题的解析处理令我极为满意."1916年1月13日,爱因斯坦代表史瓦西在柏林普鲁士科学院的会议上做了报告. 虽然物理学家对这个解很重视,但是连史瓦西和爱因斯坦都没想到它还包含了描述黑洞的重要内容(见第7和8讲).

史瓦西真空解只是真空爱因斯坦方程众多的精确解之一,但至今仍不失为爱因斯坦方程很重要的一个解. 如果所关心的时空区域存在物质场(非真空),时空线元就应是有源爱因斯坦方程[式(6-5-2)]的解. 这种方程的求解更为复杂. 史瓦西在求得真空解后仍不满足,他还想知道恒星内部时空的弯曲情况. 为了便于求解,他只考虑星体内部密度$\rho$为常数(均匀密度星)这一最简单情况. 这虽然不是一个很好的恒星模型,但仍不失为压强不太大的小恒星的一级近似. 史瓦西求得了均匀密度星内部的线元表达式(详见文献[1] P. 326),现在称为史瓦西内解. 在爱因斯坦向科学院报告了史瓦西真空解的短短几周之后,他又向科学院报告了史瓦西的第二篇论文,即史瓦西内解. 非常不幸的是,史瓦西在寻求他的真空解的同时已经身患不治之症天胞疮. 他不久便被送回国内,并于1916年5月英年早逝. 6月19日,爱因斯坦悲痛地向科学院报告了史瓦西因病辞世的噩耗.

史瓦西的全名是卡尔·史瓦西,其子马丁·史瓦西在父亲去世时年仅4岁,后来也成为天文学家,1955年同霍伊尔合作发表的重要论文首次算出普通恒星如何演化为红巨星(见7.2.1节).

爱因斯坦方程的高度非线性给求解以及整个广义相对论研究带来许多困难. 在大多数情况下引力场很弱,可用近似处理手法把爱因斯坦方程变为线性方程,从而使问题大为简化. 在4维语言中,弱引力场意味着时空线元$ds^2$接近闵氏线元$(ds^2)_{闵}$,可以表为$(d^2s)_{闵}$加上一个"很小"的微扰线元$(ds^2)_{微}$,即

$$ds^2 = (ds^2)_{闵} + (ds^2)_{微}, \qquad (6-5-6)$$

微扰线元$(ds^2)_{微}$与闵氏线元$(ds^2)_{闵}$相较是如此之小,以至于它的2阶和高阶项都可忽略. 在此基础上,经过一番计算就可求得爱因斯坦方程(6-5-2)的线性近似表达式,称为线性爱因斯坦方程,它可以看作是关于待求线元$(ds^2)_{微}$的线性的偏微分方程组. 这一线性化使得求解和讨论都简单得多. 进一步说,如果问题所涉及的物质运动的速率都很小于光速(因而满足弱场低速条件),从线性爱因斯坦方程出发还可推出两个简单的方程,第一个(在实

① 恒星是靠内部烧氢变氦的核聚变反应维持自身的稳定性的. 核燃料总有用完的一天,那时恒星将在自身引力作用下出现剧烈的坍缩(详见第7讲). 但是现在关心的只是恒星在其(很长的)稳定期内的情况,故言有静态性.

② 当时的爱因斯坦连方程的一个近似解(在弱引力场近似下的解)也没有求得过.

质上）就是牛顿引力论的泊松方程（6－5－1），第二个则是自由质点的加速度表达式

$$\boldsymbol{a} = -\nabla\Phi, \qquad (6-5-7)$$

而这正是牛顿引力论中自由质点的运动方程（右边无非是该质点单位质量所受的引力）. 上述结果表明牛顿引力论可以看作广义相对论的弱场低速近似. 读者至此是不是倍感欣慰？试想，假若广义相对论在弱场低速条件下与牛顿引力论竟然还有比较明显的岐离，它还能站得住脚吗？须知在弱场低速情况下牛顿引力论几乎是战无不胜、攻无不克的！事实上，用广义相对论进行的计算通常都很复杂，"杀鸡焉用牛刀"，在满足弱场低速条件时完全可以放心使用牛顿引力论. 太阳系内的引力场对于我们关心的绝大多数问题都是足够弱的，牛顿引力论仍然大有用武之地. [不过，太阳系中也有少数天文观测数据与牛顿引力论的理论结果不完全吻合（例如水星近日点的进动和星光在太阳附近的偏转），但使用广义相对论就能得到与观测非常吻合的结论（详见§8.4 和§8.5）]. 反之，黑洞附近的引力场则强得离奇（见§7.3、§7.5 及 8.9），这时就非用广义相对论不可.

## 参考文献:


[1] 梁灿彬，周彬. 微分几何入门与广义相对论（上册）[M]. 北京：科学出版社，2006.

[2] Misner C, Thorne K, Wheeler J. Gravitation [M]. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1973.

[3] Synge J L. Relativity: The general theory [M]. Amsterdam: North Holl and Publishing Company, 1960.

[4] Wald R M. General Relativity [M]. Chicago: The University of Chicago Press, 1984.

[5] Will C M. Theory and experiment in gravitational physics [M]. 2nd edition. London: Cambridge University Press, 1993.

[6] Will C M. The confrontation between general relativity and experiment [J]. Living Rev Relativity, 2001, 4 (4). (http://www.livingreviews.org/lrr－2001－4).


（第6讲续完）

（上接57页）

## A physics teaching method based on modern technology: TEAL

LI Chuan-Yong, SUN Qian, LIU Yu-Bin, SONG Feng

(School of Physics, Nankai University, Tianjing 300071, China)

**Abstract:** This paper introduces the basic ideas of a technology－based active learning method, i. e., TEAL (technolgy enabled active learning), and analyzes its teaching philosphy and its role in physcs teaching, then investigates its feasibility of its application in physics teaching in China.

**Key words:** TEAL; physics teaching; active learning

（上接60页）

## The general solution of the resistance between two arbitrary nodes in an infinite square lattice

TIAN Shu-xun

(College of Physics and Information Science, Hunan Normal University, Changsha, Hunan 410081, China)

**Abstract:** We study the resistance between two arbitrary nodes in an infinite square lattice by mathematical integral and get the general solution of the resistance between two arbitrary nodes of the coordinate axis. Then we draw the contour line of the resistance to the origin and find out that this line is close to a circle. Finally, we give an approximate formula to calculate the equivalent resistance between two arbitrary nodes in the plane.

**Key words:** infinite square lattice; equivalent resistance; integral; approximate formula